<u>DS Spé math Terminale S</u>

<u>Le lundi 20 janvier 2020</u>

2 heures Calculatrice autorisée

<u>Exercice 1 :</u> Les questions de cet exercice sont indépendantes

1) Soit B = (b_{ij}) une matrice carrée d'ordre 5

Ecrire dans chaque cas la matrice B :

a) i = j b) i = j - 1 c) i = j + 1 d) i + j = 5

toute réponse cohérente est acceptée

2) Soit A = $\begin{pmatrix} 3 & 8 & 1 \\ 0 & 7 & 11 \\ a & b & 2 \end{pmatrix}$ et B = $\begin{pmatrix} 15 & c & d \\ \mathrm{e} & 35 & f \\ 6 & 5 & g \end{pmatrix}$.

Déterminer les réels a , b , c , d , e , f , g et k tel que A = kB

on remarque facilement que k = $\frac{1}{5}$ d'où A = k B devient :

$$\begin{pmatrix} 3 & 8 & 1 \\ 0 & 7 & 11 \\ a & b & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & \frac{c}{5} & \frac{d}{5} \\ \frac{\mathrm{e}}{5} & 7 & \frac{f}{5} \\ \frac{6}{5} & 1 & \frac{g}{5} \end{pmatrix} \text{ d'où } \begin{cases} a=\frac{6}{5} \\ b=1 \\ c=40 \\ d=5 \\ \mathrm{e}=0 \\ f=55 \\ g=10 \end{cases}$$

3) Déterminer les réels a et b tels que : $\begin{pmatrix} a^2 & 3 \\ a+b & 10 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 8 & c \\ 1{,}5a-0{,}5 & 5 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} a^2=16 \\ 3=2c \\ a+b=3a-1 \end{cases} \text{ ce qui donne } \begin{cases} a=4 \\ c=1{,}5 \\ b=7 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a=-4 \\ c=1{,}5 \\ b=-9 \end{cases}$$

4) Déterminer les réels x et y tels que : x $\begin{pmatrix} 11 & 7 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$ + y $\begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} -17 & -23 \\ 16 & -7 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 11x+8y & 7x-y \\ -4x+2y & 3x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 & -23 \\ 16 & -7 \end{pmatrix} \text{ d'où } \begin{cases} 11x+8y=-17 \\ 7x-y=-23 \\ -4x+2y=16 \\ 3x+y=-7 \end{cases}$$

On conserve le système formé des ligne 2 et 4 : $\begin{cases} 7x-y=-23 \\ 3x+y=-7 \end{cases}$.

Par addition il vient : $10x=-30$ d'où x = -3 et on a alors $y=-7-3x=-7+9=2$

on vérifie alors les équations 1 et 3 pour $(x;y)=(-3;2)$:

$11x+8y=-33+16=-17$ et $-4x+2y=12+4=16$ donc les équations étant vérifiés, on a $(x;y)=(-3;2)$

Exercice 2 : **pour les spécialistes**

Les parties A et B peuvent être traitées de manière indépendante

Partie A

Afin de crypter un message, on utilise un chiffrement affine. Chaque lettre de l'alphabet est associé à un nombre entier comme indiqué dans le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Soit x le nombre associé à la lettre à coder . On détermine le reste y de la division euclidienne de $7x+5$ par 26 puis on en déduit la lettre associée à y (c'est elle qui code la lettre d'origine)

Exemple :

M correspond à x = 12

$7\times12+5=89$

Or 89 ≡ 11 [26] et 11 correspond à la lettre L donc la lettre M est codée par la lettre L

1) Coder la lettre L

   L correspond à x = 11

   $7\times11+5=82$

   Or 82 ≡ 4 [26] et 4 correspond à la lettre E donc la lettre L est codée par la lettre E

2) a) Soit k un entier relatif. Montrer que si k ≡ 7x [26] alors 15k ≡ x [26]

   k ≡ 7x [26] alors 15k ≡ $15\times7x$ [26] or $15\times7=105$ et $105=4\times26+1$ donc 15×7 ≡ 1 (26)

   b) Démontrer la réciproque de l'implication précédente

   On a 15k ≡ x [26] donc $7\times15k$ ≡ $7\times x$ [26] et comme 15×7 ≡ 1 (26) on a la réponse

   c) En déduire que y ≡ 7x+5 [26] équivaut à x ≡ 15y+3 [26]

   pour k = $y-5$, l'équivalence précédente devient $y-5$ ≡ 7x (26) ⇔ $15(y-5)$ ≡ x (26) ssi

   $15y-75$ ≡ x (26) or $-75=26\times(-3)+3$ d'où -75 ≡ 3 (26) ce qui donne la réponse

3) A l'aide de la question précédente, décoder la lettre F

   F correspond à y = 5 on cherche donc x tel que y ≡ 7x+5 (26) d'après la question précédente, on a :

x ≡ 15y+3 (26) cad x ≡ $15\times5+3(26)$ d'où $x\equiv78(26)\equiv0(26)$ la lettre recherché est donc le A

Partie B

On considère les suites (a_n) et (b_n) telles que a_0 et b_0 sont des entiers compris entre 0 et 25 inclus et pour tout entier naturel n, $a_{n+1}=7a_n+5$ et $b_{n+1}=15b_n+3$

Montrer que pour tout entier naturel n, $a_n=\left(a_0+\frac{5}{6}\right)\times7^n-\frac{5}{6}$

Par récurrence

On admet pour la suite du problème que pour tout entier naturel n , $b_n=\left(b_0+\frac{3}{14}\right)\times15^n-\frac{3}{14}$

Partie C

Déchiffrer un message codé avec un chiffrement affine ne pose pas de difficulté (On peut tester les 312 couples de coefficients possibles) . Afin d'augmenter cette difficulté de décryptage, on propose d'utiliser une clé qui indiquera pour chaque lettre le nombre de fois où on lui applique le chiffrement affine de la partie A.

Par exemple, pour coder le mot MATH avec la clé 2-2-5-6 on applique 2 fois le chiffrement affine à la lettre M (cela donne E), 2 fois le chiffrement à la lettre A, 5 fois le chiffrement à la lette T et enfin 6 fois le chiffrement à la lettre H.

Dans cette partie, on utilisera la clé 2-2-5-6

Décoder la lettre Q dans le mot IYYQ

Les suites (a_n) et (b_n) de la partie B nous donne les lettres obtenues après n applications du chiffrement affine , a_n étant pour le codage et b_n pour le décodage.

Après avoir appliqué 6 fois le système de cryptage, on a obtenu Q . On cherche donc b_6 pour un b_0 qui vaut 16 . On a donc :

$b_6=\left(16+\frac{3}{14}\right)\times 15^6-\frac{3}{14}$ = 184 690 848 = 7 103 494×26+4 ≡ 4 (26) donc la lettre est E