Le lundi 20 janvier 2020

DS Spé math Terminale S

2 heures Calculatrice autorisée

Exercice 1 : Les questions de cet exercice sont indépendantes

1) Soit A = $\begin{pmatrix} 3 & 8 & 1 \\ 0 & 7 & 11 \\ a & b & 2 \end{pmatrix}$ et B = $\begin{pmatrix} 15 & c & d \\ e & 35 & f \\ 6 & 5 & g \end{pmatrix}$.

Déterminer les réels a , b , c , d , e , f , g et k tel que A = kB

2) Déterminer les réels a et b tels que : $\begin{pmatrix} a^2 & 3 \\ a+b & 10 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 8 & c \\ 1{,}5\,a-0{,}5 & 5 \end{pmatrix}$

3) Déterminer les réels x et y tels que : $x \begin{pmatrix} 11 & 7 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 & -23 \\ 16 & -7 \end{pmatrix}$

Exercice 2 : **pour les spécialistes**

Les parties A et B peuvent être traitées de manière indépendante

Partie A

Afin de crypter un message, on utilise un chiffrement affine. Chaque lettre de l'alphabet est associé à un nombre entier comme indiqué dans le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Soit x le nombre associé à la lettre à coder . On détermine le reste y de la division euclidienne de $7x+5$ par 26 puis on en déduit la lettre associée à y (c'est elle qui code la lettre d'origine)

Exemple :

M correspond à x = 12

$7\times 12+5=89$

Or 89 ≡ 11 [26] et 11 correspond à la lettre L donc la lettre M est codée par la lettre L

1) Coder la lettre L

2) a) Soit k un entier relatif. Montrer que si $k \equiv 7x$ [26] alors $15k \equiv x$ [26]

b) Démontrer la réciproque de l'implication précédentes

c) En déduire que $y \equiv 7x+5$ [26] équivaut à $x \equiv 15y+3$ [26]

3) A l'aide de la question précédente, décoder la lettre F

Partie B

On considère les suites (a_n) et (b_n) telles que a_0 et b_0 sont des entiers compris entre 0 et 25 inclus et pour tout entier naturel n, $a_{n+1}=7a_n+5$ et $b_{n+1}=15b_n+3$

Montrer que pour tout entier naturel n, $a_n=\left(a_0+\frac{5}{6}\right)\times 7^n-\frac{5}{6}$

On admet pour la suite du problème que pour tout entier naturel n , $b_n=\left(b_0+\frac{3}{14}\right)\times 15^n-\frac{3}{14}$

Partie C

Déchiffrer un message codé avec un chiffrement affine ne pose pas de difficulté (On peut tester les 312 couples de coefficients possibles) . Afin d'augmenter cette difficulté de décryptage, on propose d'utiliser une clé qui indiquera pour chaque lettre le nombre de fois où on lui applique le chiffrement affine de la partie A.

Par exemple, pour coder le mot MATH avec la clé 2-2-5-6 on applique 2 fois le chiffrement affine à la lettre M (cela donne E), 2 fois le chiffrement à la lettre A, 5 fois le chiffrement à la lette T et enfin 6 fois le chiffrement à la lettre H.

Dans cette partie, on utilisera la clé 2-2-5-6

Décoder la lettre Q dans le mot IYYQ