TS Spé Math sujet 2

Jeudi 28 novembre 2019

2 heures

<u>Exercice 1 (5 points) :</u>

<u>I-</u>

1) Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel non nul n le reste dans la division euclidienne par 9 de 7^n

   $7 \equiv 7\ (9)$ $7^2 \equiv 49\ (9) \equiv 4\ (9)$ $7^3 \equiv 28\ (9) \equiv 1\ (9)$ $7^4 \equiv 7\ (9)$

2) Démontrer alors que $(2005)^{2005} \equiv 7(9)$

   $2005 = 222 \times 9 + 7$ donc $2005 \equiv 7\ (9)$ et par compatibilité avec les puissances, on obtient

   $2005^{2005} \equiv 7^{2005}\ (9)$

   $2005 = 3 \times 668 + 1$ donc $7^{2005} = (7^3)^{668} \times 7$ d'où $7^{2005} \equiv 7\ (9)$ donc $2005^{2005} \equiv 7\ (9)$

<u>II-</u>

1) Démontrer que pour tout entier naturel non nul n , $10^n \equiv 1\ (9)$

   Facile

2) On désigne par N un entier naturel écrit en base 10. On appelle S la somme de ses chiffres.

   Démontrer la relation suivante : $N \equiv S\ (9)$

   Si N s'écrit avec 3 chiffres : N = $\overline{abc} = a \times 10^2 + b \times 10 + c$ or d'après 1) $10^n \equiv 1\ (9)$

   on a donc $N \equiv a+b+c\ (9)$ c'est à dire $N \equiv S\ (9)$

   Ce raisonnement mené avec trois chiffres peut se généraliser à n'importe quel entier N

3) En déduire que N est divisible par 9 si et seulement si S est divisible par 9

   Facile Si $S \equiv 0\ (9)$ d'après la question précédente on a aussi $N \equiv 0\ (9)$ et réciproquement

III- On suppose que A = $(2005)^{2005}$; on désigne par :

- B la somme des chiffres de A
- C la somme des chiffres de B
- D la somme des chiffres de C

1) Démontrer que $A \equiv D\ (9)$

   D'après la question II- 2- on a $A \equiv B\ (9)$ $C \equiv B\ (9)$ et $D \equiv C\ (9)$ d'où la réponse

2) Sachant que 2005 < 10 000 , démontrer que A s'écrit en numération décimale avec au plus 8020 chiffres. En déduire que $B \leq 72\ 180$

   $2005^{2005} < 10000^{2005}$ donc le premier entier strictement inférieur à $10000^{2005} = 10^{8020}$ est composé de 8020 fois le chiffre 9 donc A s'écrit avec au plus 8020 chiffres . Un nombre formé de ces 8020 chiffres 9 a pour somme de ses chiffres $8020 \times 9 = 72180$ donc $B \leq 72180$

3) Démontrer que $C \leq 45$

   D'après la question précédente, B s'écrit avec au plus 5 chiffres donc $C \leq 9 \times 5 = 45$

4) En étudiant la liste des entiers inférieurs à 45, déterminer un majorant de D plus petit que 15 .
L'entier inférieur à 45 qui a la plus grande somme est 39 (on peut les tester) donc D ≤ 12

5) Démontrer que D = 7
On sait que A ≡ D (9) or d'après la question 1 , A ≡ 7 (9) or le seul entier inférieur ou égal à 12 qui a pour somme des chiffres 7 et 7 donc D = 7

Exercice 2 (5 points):

PARTIE A **ROC :** on rappelle l'identité de Bezout

Si pgcd(a;b) = d alors il existe des entiers u et v tels que : $au+bv=d$

Question : Citer et démontrer le théorème de Bezout

PARTIE B

Pour chacune des questions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.

Question 1 : Pour tout entier naturel n, le chiffre de unités de n^2+n n'est jamais égale à 4

On raisonne modulo 10 car le reste dans la division par dix d'un entier donne le chiffre des unités d'où 10 restes possibles :

n ≡ ... (10)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n^2 ≡ ... (10)	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1
n^2+n ≡... (10)	0	2	6	2	0	0	2	6	2	0

Le chiffre des unités de n^2+n n'est donc jamais égal à 4 VRAIE

Question 2 : On considère la suite u définie pour n ≥ 1 , par : $u_n=\frac{1}{n}\text{PGCD}(n;20)$

La suite (u_n) est convergente

On a : 0 ≤ $\text{PGCD}(n;20)$ ≤ 20 donc $0\leq u_n\leq\frac{20}{n}$ + th des gendarmes la limites est 0 donc la suite converge VRAIE

Question 3 : pour tout entier naturel n non nul , $5^{6n+1}+2^{3n+1}$ est divisible par 5

FAUXcontre exemple : n = 1 : $5^{6n+1}+2^{3n+1}$ = 5^7+2^4 = 78141 qui n'est pas divisible par 5

Question 4 : Si n ≡ 1 (7) alors $\text{PGCD}(3n+4;4n+3)=7$

$4(3n+4)-3(4n+3)$ = 7 donc $\text{PGCD}(3n+4;4n+3)=\text{PGCD}(3n+4;7)$. Ce PGCD vaut donc 1 ou 7 : Il vaut 1 si 3n+4 n'est pas divisible par 7 sinon il vaut 7.
Comme n ≡ 1 (7) , 3n+ 4 ≡ 7 (7) ≡ 0 (7) donc la PGCD vaut 7 **VRAIE**