TS Spé Math sujet 2

Jeudi 28 novembre 2019

2 heures

Exercice 1 (5 points) :

I-

1) Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel non nul n le reste dans la division euclidienne par 9 de 7^n
2) Démontrer alors que $(2005)^{2005} \equiv 7(9)$

II-

1) Démontrer que pour tout entier naturel non nul n , $10^n \equiv 1\ (9)$
2) On désigne par N un entier naturel écrit en base 10. On appelle S la somme de ses chiffres. Démontrer la relation suivante : N ≡ S (9)
3) En déduire que N est divisible par 9 si et seulement si S est divisible par 9

III- On suppose que A = $(2005)^{2005}$; on désigne par :

- B la somme des chiffres de A
- C la somme des chiffres de B
- D la somme des chiffres de C

1) Démontrer que A ≡ D (9)
2) Sachant que 2005 < 10 000 , démontrer que A s'écrit en numération décimale avec au plus 8020 chiffres. En déduire que B ≤ 72 180
3) Démontrer que C ≤ 45
4) En étudiant la liste des entiers inférieurs à 45, déterminer un majorant de D plus petit que 15 .
5) Démontrer que D = 7

Exercice 2 (5 points):

PARTIE A **ROC :** on rappelle l'identité de Bezout

Si pgcd(a;b) = d alors il existe des entiers u et v tels que : $au+bv=d$

Question : Citer et démontrer le théorème de Bezout

PARTIE B

Pour chacune des questions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.

Question 2 : Pour tout entier naturel n, le chiffre de unités de n^2+n n'est jamais égale à 4

Question 2 : On considère la suite u définie pour n ≥ 1 , par : $u_n=\frac{1}{n}\mathrm{PGCD}(n;20)$

La suite (u_n) est convergente

Question 3 : pour tout entier naturel n non nul , $5^{6n+1}+2^{3n+1}$ est divisible par 5

Question 4 : Si n ≡ 1 (7) alors $\mathrm{PGCD}(3n+4;4n+3)=7$