TS Spé Math sujet 1

Lundi 25 novembre 2019

2 heures

<u>Exercice 1 (5 points) :</u>

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=3$ et pour tout entier naturel n, par $u_{n+1}=2u_n+6$

1) Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n=9\times 2^n-6$

   un raisonnement par récurrence

2) Démontrer que pour tout entier naturel n ≥ 1, u_n est divisible par 6

   Comme n≥1, $9\times 2^n=3\times 3\times 2\times 2^{n-1}$ = 6 * K avec K ∈ ℕ . d'où u_n peut se factoriser par 6

On définit la suite (v_n) par, pour tout entier naturel n ≥ 1 , $v_n=\dfrac{u_n}{6}$

3) On considère l'affirmation : » pour tout entier naturel n non nul, v_n est un nombre premier »

   Indiquer si cette affirmation est vraie ou fausse en justifiant votre réponse

   rappel : un nombre premier n'est divisible que par 1 et par lui-même

   On calcule les premiers v_n à la calculatrice et on constate que $v_6=95$ divisible par 1 lui même et 5 donc non premier affirmation fausse

4) a) Démontrer que pour tout n ≥ 1 , $v_{n+1}-2v_n=1$

   $$v_{n+1}-2v_n=\frac{u_{n+1}-2u_n}{6} = \frac{9\times 2^{n+1}-6-2\times 9\times 2^n+12}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

   b) En déduire que pour tout n ≥ 1 , v_n et v_{n+1} sont premier entre eux

   C'est une application du théorème de Bezout

   c) En déduire, pour tout entier n ≥ 1 , le PGCD de u_n et u_{n+1}

   $\mathrm{PGCD}(u_{n+1};u_n)=\mathrm{PGCD}(6v_{n+1};6v_n)$ = 6 $\mathrm{PGCD}(v_{n+1};v_n)$ = $6\times 1=6$

5) a) Vérifier que $2^4 \equiv 1(5)$

   Facile

   b) En déduire que si n est un entier de la forme 4k+2 avec k entier naturel, alors u_n est divisible par 5

   $u_n=9\times 2^{4k+2}-6$ = $9\times (2^4)^k\times 2^2-6 \equiv 9\times 1\times 2^2-6$ (5) ≡ 30 (5) ≡ 0 (5) d'où la réponse

6) Le nombre u_n est-il divisible par 5 pour les autres valeurs de l'entier naturel n ? Justifier

   Il y a trois cas à étudier : n=4k , n=4k+1 et n = 4k+3

   n = 4k : $u_n=9\times (2^4)^k-6$ ≡ 9 - 6 (5) ≡ 3 (5) non divisible par 5

   n = 4k + 1 : $u_n=9\times (2^4)^k\times 2^1-6 \equiv 9\times 2-6(5)$ ≡ 12 (5) ≡ 2 (5) non divisible par 5

   n = 4k + 3 : $u_n=9\times (2^4)^k\times 2^3-6 \equiv 9\times 2^3-6$ (5) ≡ 66 (5) ≡ 1 (5) non divisible par 5

Exercice 2 (5 points):

PARTIE A

ROC : on rappelle l'identité de Bezout

Si pgcd(a;b) = d alors il existe des entiers u et v tels que : $au+bv=d$

Question : Citer et démontrer le théorème de Bezout

PARTIE B

Pour chacune des questions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.

Question 1 : Le reste de la division de 2011^{2011} par 7 est 2

$2011=7\times 287+2$ donc 2011^{2011} $\equiv$ 2^{2011} (7) or $2^3=8$ $\equiv$ 1 (7) donc comme $2011=3\times 670+1$, on a : $2^{2011}=(2^3)^{670}\times 2^1$ $\equiv$ 2 (7) donc VRAIE

Question 2 : pour tout entier naturel n non nul, $5^{6n+1}+2^{3n+1}$ est divisible par 7

$5^6=15625=7\times 2232+1$ donc 5^6 $\equiv$ 1 (7) $2^3=8$ $\equiv$ 1 (7) d''où :

$5^{6n+1}+2^{3n+1}$ $\equiv$ $(5^6)^n\times 5^1+(2^3)^n\times 2^1$ (7) ≡ 5 + 2 (7) ≡ 0 (7) donc VRAIE

Question 3 : Si x^2+x ≡ 0 (6) alors x ≡ 0 (3)

On dresse un tab de congruence :

Reste de x modulo 6	0	1	2	3	4	5
Reste de x^2 modulo 6	0	1	4	3	4	1
Reste de x+x^2 modulo 6	0	2	0	0	2	0

D'après le tableau en choisissant x ≡ 2 (6), la somme est congru à 0 . On peut donc tester un contre exemple : Si x = 8 , on a x^2+x = 72 = 6×12 ≡ 0 (6) or x = 8 donc x ≡ 2 (3) donc FAUX

Question 4 : Soit l'entier N = $a\times 10^3+b\times 10^2+10a+7$ qui s'écrit en base 10 : N= $\overline{aba7}$ (a et b sont donc des chiffres)

Si N est divisible par 7 alors $a+b$ est divisible par 7

$10^3=1000$ ≡ 6 (7) car $1000=7\times 142+6$

$10^2=100$ ≡ 2 (7) car 100 = $7\times 14+2$

d'où N ≡ $6a+2b+3a+7$ (7) c'est à dire N ≡ $9a+2b+7$ (7) ≡ $2a+2b+7$ (7)

d'où Si N ≡ 0 (7) cela donne 2a+2b+7 ≡ 0(7) cad 2a+2b ≡ 0(7) en multipliant par 4 on trouve alors $8a+8b \equiv 0 \ (7)$ et comme $8 \equiv 1\ (7)$, on obtient $a+b \equiv 0\ (7)$ VRAI