TS Spé Math sujet 1

Lundi 25 novembre 2019

2 heures

Exercice 1 (5 points) :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=3$ et pour tout entier naturel n, par $u_{n+1}=2u_n+6$

1) Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n=9\times 2^n-6$
2) Démontrer que pour tout entier naturel n ≥ 1, u_n est divisible par 6

On définit la suite (v_n) par, pour tout entier naturel n ≥ 1 , $v_n=\frac{u_n}{6}$

3) On considère l'affirmation : » pour tout entier naturel n non nul, v_n est un nombre premier »
   Indiquer si cette affirmation est vraie ou fausse en justifiant votre réponse
   rappel : un nombre premier n'est divisible que par 1 et par lui-même
4) a) Démontrer que pour tout n ≥ 1 , $v_{n+1}-2v_n=1$
   b) En déduire que pour tout n ≥ 1 , v_n et v_{n+1} sont premier entre eux
   c) En déduire, pour tout entier n ≥ 1 , le PGCD de u_n et u_{n+1}
5) a) Vérifier que $2^4 \equiv 1(5)$
   b) En déduire que si n est un entier de la forme 4k+2 avec k entier naturel, alors u_n est divisible par 5
6) Le nombre u_n est-il divisible par 5 pour les autres valeurs de l'entier naturel n ? Justifier

Exercice 2 (5 points):

PARTIE A

ROC : on rappelle l'identité de Bezout

Si pgcd(a;b) = d alors il existe des entiers u et v tels que : $au+bv=d$

Question : Citer et démontrer le théorème de Bezout

PARTIE B

Pour chacune des questions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.

Question 1 : Le reste de la division de 2011^{2011} par 7 est 2

Question 2 : pour tout entier naturel n non nul, $5^{6n+1}+2^{3n+1}$ est divisible par 7

Question 3 : Si $x^2+x \equiv 0$ (6) alors x ≡ 0 (3)

Question 4 : Soit l'entier N = $a\times 10^3+b\times 10^2+10a+7$ qui s'écrit en base 10 : N= $\overline{aba7}$ (a et b sont donc des chiffres)

Si N est divisible par 7 alors $a+b$ est divisible par 7