DM TS Spé math

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$) on considère les points E , F et G de coordonnées respectives : $(2;2)$, $(-1;5)$ et $(-3;3)$

Une transformation du plan associe à tout point $M(x;y)$ le point $M'(x';y')$ tel que :

$$\begin{cases} x'=\dfrac{5}{4}x+\dfrac{3}{4}y \\ y'=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{5}{4}y \end{cases}$$

1) a) Calculer les coordonnées des points E' , F', G' images des points E, F et G par cette transformation

   b) Comparer les longueurs OE et OE' d'une part et OG et OG' d'autre part

   Donner la matrice carrée d'ordre 2 notée A telle que $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

2) On étudie les coordonnées des images successives du sommet E du rectangle OEFG (on admet que OEFG est un rectangle)

   On définit donc la suite des points E_n $(x_n;y_n)$ du plan par $E_0=E$ et la relation de récurrence $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A\times \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ où $(x_{n+1};y_{n+1})$ sont les coordonnées de E_{n+1} .

   Ainsi $x_0=2$ et $y_0=2$

   a) On admet que, pour tout entier n ≥ 1, la matrice A^n peut s'écrire sous la forme $\begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \beta_n & \alpha_n \end{pmatrix}$. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n ≥ 1 , on a :

$$\alpha_n=2^{n-1}+\frac{1}{2^{n+1}} \text{ et } \beta_n=2^{n-1}-\frac{1}{2^{n+1}}$$

   b) Démontrer que pour tout entier naturel n le point E_n est sur la droite d'équation y = x

   c) Démontrer que la longueur OE_n tend vers +∞ quand n tend vers +∞

3) On s'intéresse dans cette question aux images successives du point G. On notera donc G_n cette suite de points. Sur quelle droite sont situés les points G_n et la longueur OG_n tend-elle aussi vers +∞ quand n tend vers +∞ ?