Résoudre l'équation $x^3-(m^2+3)x^2+(m^2+3)x+m^4-1=0$

On parle en indice d'écrire une équation bicarrée en m puis de développer $(1-x)^3$

- $(1-x)^3=1-3x+3x^2-x^3$
- Equation bicarrée : $m^4+(-x^2+x)m^2+x^3-3x^2+3x-1=0$

$$m^4+x(-x+1)m^2-(1-x)^3=0$$

On pose M = m^2 donc

$$M^2+x(1-x)M-(1-x)^3=0$$

$$\Delta = x^2(1-x)^2+4(1-x)^3$$

$$\Delta = (1-x)^2(x^2+4(1-x))$$

$$\Delta = (1-x)^2(x^2-4x+4)$$

$$\Delta = (1-x)^2(x-2)^2$$

on peut alors prendre (sans condition ?????) $\sqrt{\Delta}=(1-x)(x-2)$ d'où

$$M_1 = \frac{-x(-x+1)-(1-x)(x-2)}{2} = \frac{(1-x)(-x-x+2)}{2} = (1-x)^2$$

$$M_2 = \frac{-x(-x+1)+(1-x)(x-2)}{2} = \frac{(1-x)(-x+x-2)}{2} = x-1$$

L'équation bicarrée devient après factorisation :

$$(M-(1-x)^2)(M-(x-1))=0$$

$$(m^2-(1-x)^2)(m^2-(x-1))=0$$

le produit nul donne alors : $m^2-(1-x)^2=0$ ou $m^2-(x-1)=0$

$(m-(1-x))(m+(1-x))=0$ ou x = m^2+1

$x=1-m$ ou x = $m+1$ ou x = m^2+1