DM 1 TS spé Math

Exercice 1 :

On considère deux entiers naturels a et b tels que : $a^2-2b^2=1$ (E)

1) a) $a^2=2b^2+1$ donc a^2 s'écrit 2k+1 avec $k \in \mathbb{N}$ donc a^2 est impair et donc a est impair
   b) a est impair donc a = 2 k + 1 avec $k \in \mathbb{N}$ donc $4k^2+4k+1-2b^2=1$ et $b^2=2(k^2+k)$ d'où b^2 est pair et b est pair

2) Sur la calculatrice, on entre la fonction $\sqrt{2x^2+1}$ et on cherche les entiers.
Il n'y a que quatre couples (a , b) d'entiers inférieurs à 100 vérifiant (E) : (1 ; 0) (3 ; 2) (17 ; 12) (99 ; 70)

3) $A^2-2B^2=9a^2+24ab+16b^2-8a^2-24ab-18b^2=a^2-2b^2$ et comme (a;b) est solution, $a^2-2b^2=1$ d'où $A^2-2B^2=1$ et le couple (A;B) est solution

4) On sait que (a;b)=(99;70) est solution donc d'après la question 3) (A;B)= $(3\times99+4\times70;2\times99+3\times70)$ = (577 ; 408) est solution.
On recommence alors avec ce couple : $(3\times577+4\times408;2\times577+3\times408)$ = (3363 ; 2378) est solution

Exercice 2 :

x = hommes y = femmes

L'équation est 19x+13y=1000

D'après l'algorithme, on trouve comme couple :

(2 ; 74) (15 ; 55) (28 ; 36) (41 ; 17)

```
equation diophantienne 1  -  12.09.2011

******************************************
R√©soudre dans l'ensemble des entiers naturels l'√©quation diophantienne ax
+ b y = c avec a , b et c positifs
******************************************

VARIABLES
  a EST_DU_TYPE NOMBRE
  b EST_DU_TYPE NOMBRE
  c EST_DU_TYPE NOMBRE
  xmax EST_DU_TYPE NOMBRE
  ymax EST_DU_TYPE NOMBRE
  x EST_DU_TYPE NOMBRE
  y EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE a
  LIRE b
  LIRE c
  xmax PREND_LA_VALEUR floor(c/a)
  ymax PREND_LA_VALEUR floor(c/b)
  POUR x ALLANT_DE 0 A xmax
    DEBUT_POUR
    POUR y ALLANT_DE 0 A ymax
      DEBUT_POUR
      SI (a*x+b*y==c) ALORS
        DEBUT_SI
        AFFICHER "le couple (x,y) = ("
        AFFICHER x
        AFFICHER ","
        AFFICHER y
        AFFICHER ") est solution"
        FIN_SI
      FIN_POUR
    FIN_POUR
FIN_ALGORITHME
```

Exercice 3 :

Dans une famille, il y a trois filles d'âges x , y et z
La somme de leurs âges est 13 et leurs produit est 36.

1) x + y + z = 13 et xyz = 36
   Pour que le produit soit pair, au moins un des âge doit être pair et pour que la somme soit impair, il faut que :
   - les trois âges soient impairs ce qui n'est pas possible car l'un doit être pair
   - deux pairs et un impair (OK)

le cas deux impairs et un pair donnant un pair n'est pas acceptable
Conclusion : deux âges sont pairs et l'un est impair

2) $36=1\times1\times36=1\times2\times18=1\times3\times12=1\times4\times9=1\times6\times6=2\times2\times9=2\times3\times6=3\times3\times9=3\times4\times3$
   D'après le critère précédent, il reste : (1,2,18) ou (1,6,6) ou (2,2,9) ou (2,3,6) or la somme doit faire 13 donc au final il reste : (1,6,6) ou (2,2,9)

Exercice 4 :

5) Soit n un entier naturel . On considère les entiers N = 9n+1 , M = 9n – 1 et P = $81n^2-1$

a) Si n est pair alors n = 2k d'où $M=18k-1=2K-1$ impair . De même N impair

Si n est impair alors n = 2k+1 d'où $M=18k+10=2K$ pair . De même pour N pair

Ainsi M et N ont la parité contraire de n

b) si n est pair alors $81n^2-1 = 81(2k)^2-1 = 2K-1$ est impair

c) Démontrer que $81n^2-1$ est divisible par 4 **si et seulement si** n est impair

Il est important ici d'envisager la réciproque

Si n impair, n = 2k+1 . $81n^2-1=81(2k+1)^2-1$ = $324k^2+324k+80$ = 4K donc divisible par 4

Si $81n^2-1$ est divisible par 4 alors il est pair d'où d'après la contraposée de la propriété établie en b) si

$81n^2-1$ est pair alors n est impair . CQFD