

Interrogation math expert / 15 points

On prendra soin de détailler tous les calculs

Exercice 1 (3 points) Mettre les nombres suivants sous forme algébrique :

$$1) z_1 = \frac{1}{5+9i} = \frac{5-9i}{(5+9i)(5-9i)} = \frac{5-9i}{106}$$

$$2) z_2 = \frac{2-3i}{8+6i} = \frac{(2-3i)(8-6i)}{(8+6i)(8-6i)} = \frac{16-12i-24i-18}{64+36} = \frac{-2-36i}{100} = -\frac{1}{50} - i\frac{9}{25}$$

$$3) z_3 = (1-3i)^2(-8+6i) = (1-6i-9)(-8+6i) = (-8-6i)(-8+6i) = 64+36 = 100$$

Exercice 2 (8 points) Equations

Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes en donnant la solution sous forme algébrique

$$1) -2z+3=iz+1-i$$

$$-2z-iz = -3+1-i$$

$$(-2-i)z = -2-i$$

$$z = 1$$

$$2) iz+\bar{z}-3=7-\bar{z}+5i$$

$$i(x+iy)+x-iy-3 = 7-x+iy+5i$$

$$x-3-y+i(x-y) = 7-x+i(y+5)$$

on identifie partie réelle et imaginaire

$$\begin{cases} x-3-y=7-x \\ x-y=y+5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x-y=10 \\ x-2y=5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(5+2y)-y=10 \\ x=5+2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=0 \\ x=5 \end{cases} \text{ d'où } z = 5$$

$$3) z^2-4z+8=0$$

$$\Delta = -16 < 0 \text{ deux solutions complexes}$$

$$z_1 = \frac{4+4i}{2} = 2+2i \quad z_2 = \frac{4-4i}{2} = 2-2i$$

$$4) \frac{3+z}{3-z} = z \text{ pour } z \neq 3$$

$$3+z = z(3-z)$$

$$-z^2+2z-3=0$$

$$\Delta = -8$$

$$z_1 = \frac{-2-2\sqrt{2}i}{-2} \text{ et } z_2 = \frac{-2+2\sqrt{2}i}{-2}$$

$$z_1 = 1+\sqrt{2}i \quad z_2 = 1-\sqrt{2}i$$

Exercice 3 (4 points) On considère l'équation (E) : $z^4+2z^3-z-2=0$

1) Donner une solution évidente de (E)

$z = 1$ est évident

$$\begin{aligned} 2) \text{ Déterminer } a \text{ et } b \text{ tels que : } z^4+2z^3-z-2 &= (z^2+az+b)(z^2+az+1) \\ &= z^4+az^3+z^2+az^3+a^2z^2+az+bz^2+abz+b \\ &= z^4+2az^3+(1+a^2+b)z^2+(a+ab)z+b \end{aligned}$$

Par identification il vient :

$$\begin{cases} 2a=2 \\ 1+a^2+b=0 \\ a+ab=-1 \\ b=-2 \end{cases} \quad \begin{cases} a=1 \\ 1+1^2-2=0 \text{ vérifiée} \\ 1+1 \times (-2)=-1 \text{ vérifiée} \\ b=-2 \end{cases}$$

3) Résoudre l'équation (E) dans \mathbb{C} .

$$(E) : (z^2+z-2)(z^2+z+1) = 0$$

$$z^2+z-2=0$$

$\Delta = 9 > 0$ deux sol dans \mathbb{R}

$$z_1 = 1 \text{ et } z_2 = -2$$

$$z^2+z+1=0$$

$\Delta = -3 < 0$ deux sol dans \mathbb{C}

$$z_1 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \text{ et } z_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$$