DS Matrice Terminale Math expert

Correction 1

1. • $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

• $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

• $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$

2. $A^{50} = A^{3\times16+2}y = A^{3\times16} \cdot A^2 = (A^3)^{16} \cdot A^2$

$= (I_2)^{16} \cdot A^2 = I_2 \cdot A^2 = A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

Correction 2

a. On a : $\det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = 1\times2-(-1)\times(-3) = 2-3 = -1 \neq 0$

On en déduit que la matrice est inversible et admet pour inverse la matrice :

$\frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$

b. On a :

$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = 2\times(-1)-(-1)\times1 = -2+1 = -1$

On en déduit que la matrice est inversible et admet a pour inverse la matrice :

$\frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

c. On a : $\det \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 3\times0-(-1)\cdot(-1) = 0-1 = -1$

On en déduit que la matrice est inversible et admet pour inverse la matrice :

$\frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$

Correction 3

1. a. On a le calcul matriciel suivant :

$$6 \cdot A - A^2 = 6 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 24 & 6 \\ 18 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 19 & 6 \\ 18 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

b. De la question précédente, on a obtenu :

$$6 \cdot A - A^2 = 5 \cdot I$$

$$\frac{6}{5} \cdot A - \frac{1}{5} \cdot A^2 = I$$

$$\left(\frac{6}{5} \cdot I\right) \cdot A - \left(\frac{1}{5} \cdot A\right) \cdot A = I$$

$$\left(\frac{6}{5} \cdot I - \frac{1}{5} \cdot A\right) \cdot A = I$$

Cette égalité montre que la matrice $\frac{6}{5} \cdot I - \frac{1}{5} \cdot A$ est l'inverse de la matrice A.

c. On a le calcul matriciel :

$$A^{-1} = \frac{6}{5} \cdot I - \frac{1}{5} \cdot A = \frac{6}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{6}{5} & 0 \\ 0 & \frac{6}{5} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

2. Le système se traduit par :

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$I \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{5} \\ -\frac{16}{5} \end{pmatrix}$$

Correction 4

On considère la propriété $\mathcal{P}_n$ définie par :

$$\mathcal{P}_n : \quad A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & u_n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

Montrons, à l'aide d'un raisonnmeent par récurrence, que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie au rang n.

• **Initialisation :**

Le terme de rang 1 de la suite (u_n) a pour valeur : $u_1 = u_0 + 2^0 = 0 + 1 = 1$

On en déduit les égalités :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & u_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = A = A^1$$

On vient de montrer que $\mathcal{P}_1$ est vraie.

• **Hérédité :**

Supposons que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vérifiée pour un entier naturel non-nul n quelconque. C'est à dire qu'on a l'hypothèse de récurrence :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & u_n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

Utilisons l'indication de l'énoncé :

$$A^{n+1} = A \cdot A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & u_n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & u_n+2^n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$$

D'après la définition de la suite $\big(u_n\big)$:

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & u_{n+1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$$

On vient de montrer que la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

- **Conclusion :**
  La propriété $\mathcal{P}_n$ est initialisée au rang 1 et elle vérifie la propriété d'hérédité. A l'aide du raisonnement par récurrence, on vient d'établir que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie.