DS TS Math expert

Exercice 1

1) Déterminer les restes des puissances de 2 modulo 9

$2^0 = 1 \equiv 1\ (9)$

$2^1 = 2 \equiv 2\ (9)$

$2^2 = 4 \equiv 4\ (9)$

$2^3 = 8 \equiv 8\ (9)$

$2^4 = 16 \equiv 7\ (9)$

$2^5 = 14 \equiv 5\ (9)$

$2^6 = 10 \equiv 1\ (9)$

Les puissances e 2 modulo 6 sont donc périodique de période 6 :

$2^{6k} \equiv 1\ (9)$ $2^{6k+1} \equiv 2\ (9)$ $2^{6k+2} \equiv 4\ (9)$ $2^{6k+3} \equiv 8\ (9)$ $2^{6k+4} \equiv 7\ (9)$

$2^{6k+5} \equiv 5\ (9)$

2) Prouver que $6789^{333} \equiv -1(5)$

$6789 = 5 \times 1357 + 4$ donc $6789 \equiv 4\ (5) \equiv -1\ (5)$ d'où les congruence étant compatible avec les puissances : $6789^{333} \equiv (-1)^{333}\ (5) \equiv -1\ (5) \equiv 4\ (5)$

3) Démontrer que : $6789^{333} + 3456^{79797}$ est divisible par 5

$3456 = 5 \times 691 + 1$ donc $3456 \equiv 1(5)$ et $3456^{79797} \equiv 1(5)$

On a alors par addition : $6789^{333} + 3456^{79797} \equiv -1+1 \equiv 0(5)$ d'où $6789^{333} + 3456^{79797}$ est divisible par 5

Exercice 2

Soit (E) l'équation : $x^2 - x + 4 \equiv 0(6)$

1) Compléter sur le sujet le tableau de congruence suivant :

$x \equiv \quad (6)$	0	1	2	3	4	5
$x^2 \equiv \quad (6)$						
$-x + 4 \equiv \quad (6)$						
$x^2 - x + 4 \equiv \quad (6)$						

x	0	1	2	3	4	5
$x^2 \equiv (6)$	0	1	4	3	4	1
$-x+4 \equiv (6)$	4	3	2	1	0	5
$x^2 - x + 4 \equiv (6)$	4	4	0	4	4	0

2) En déduire les solutions de l'équation (E)

On constate de part le tableau que $x^2 - x + 4 \equiv 0\ (6)$ dès que $x \equiv 2\ (6)$ ou $x \equiv 5\ (6)$ c'est à dire dés que x=2+6k ou x = 5+6k avec k entier relatif

<u>Exercice 3</u> Critère de divisibilité par 7

1) Voici deux exemples mettant en jeu une même procédure permettant de déterminer si un entier naturel est divisible par 7 ou non :

574 est-il divisible par 7 ?

57	4
−8	4 × 2
49	

49 est divisible par 7
donc 574 aussi

827 est-il divisible par 7 ?

82	7
− 14	7 × 2
68	

68 n'est pas divisible par 7
donc 827 non plus.

A l'aide de cette procédure, dire si les nombres 406 , 895 , 5607 sont divisibles par 7

406 → 40 6
−12 2×6
28
28 est divisible par 7
donc 406 aussi

895 → 89 5
−10 2×5
79
79 n'est pas divisible par 7
donc 895 aussi

5607 560 7
-14 2×7
546 54 6
-12 2×6
42
42 divisible par 7 donc 5607 aussi

2) **<u>Démonstration :</u>** Soit n un entier naturel tel que : n = $10a+b$ avec a et b entier naturel

Démontrer l'équivalence : $n \equiv 0\ (7) \Leftrightarrow a-2b \equiv 0\ (7)$

❑⇒❑

$n \equiv 0(7)$ donc $10a + b \equiv 0\ (7)$ donc $3a+b \equiv (0)\ 7$ donc $6a+2b \equiv 0\ (7)$ donc $-a + 2b \equiv 0\ (7)$

(à noter que $10 \equiv 3\ (7)$ et $6 \equiv -1\ (7)$)

Réciproquement ❑⇐❑

$a-2b \equiv 0\ (7)$ donc $10a-20b \equiv 0\ (7)$ donc $10a+b \equiv 0\ (7)$ car $-20 \equiv 1\ (7)$

b) Enoncé alors un critère de divisibilité par 7

Soit n un entier de chiffre des unités a . On considère le nombre N formé par n sans son chiffre des unités on calcule alors N − $2\times a$. Si le nombre obtenu est divisible par 7 alors n est divisible par 7

3) Démontrer que 45 794 est divisible par 7 à l'aide de ce critère (que l'on peut itérer)

45794 → 4579 4
- 8 2×4
4571

on recommence avec 4571 : 457 1
- 2 2×1
455

puis avec 455: 45 5
-10 2×5
35

Comme 35 est divisible par 7 , on en déduit que 45794 aussi