DS math expert

Le jeudi 20 octobre 2022

Exercice 1 : Les questions de cet exercice sont indépendantes

1) Soit a un entier naturel impair. Montrer que a^2+4a-5 est divisible par 8

a est impair donc a peut s'écrire 2k+1 d'où :

$a^2+4a-5 = (2k+1)^2+4(2k+1)-5 = 4k^2+4k+1+8k+4-5 = 4k^2+12k$ = 4k(k+3)

Si k est pair alors k+3 est impair et si k est impair alors k+3 est pair donc dans chaque cas k(k+3) est pair donc divisible par 2 et donc k(k+3)=2K ce qui donne a^2+4a-5 = 8K divisible par 8

2) Déterminer tous les diviseurs de 630

630 = 1×630 = 2×315 = 3×210 = 5×126 = 6×105 = 7×90 = 9×70
= 10×63 = 14×45 = 15×42 = 18×35 = 21×30

3) x et y sont des entiers naturels. Résoudre l'équation x^2-xy = 6

$x(x-y)=6$

x et $x-y$ sont des diviseurs associés de 6 . Comme x est positif , x-y aussi d'où x>y donc on a :

$\begin{cases} x=6 \\ x-y=1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x=3 \\ x-y=2 \end{cases}$ c'est à dire $\begin{cases} x=6 \\ y=5 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$

4) Déterminer les entiers relatifs n tels que $n+2$ divise $4n+1$

n+2|4n+1 et n+2|n+2 donc n+2 divise toute combinaison linéaire de n+2 et 4n+1

en particulier n+2 | $4n+1-4(n+2)$ c'est à dire n+2 | -7 donc n+2 | 7

n+2 est donc un diviseur de 7 d'où n+2 = -7 ou n+2 = –1 ou n+2 = 1 ou n+2 = 7

ce qui donne n ∈ { -9 ; -3 ; -1 ; 5 }

Vérification :

n	-9	- 3	-1	5
n+2	-7	-1	1	7
4n+1	-35	-11	-3	21

Dans chaque cas , n+2 | 4n+1 d'où n ∈ { -9 ; -3 ; -1 ; 5 }

5) a) Montrer que si d divise (12n+7) et (3n+1) alors d divise 3

d divise toute combinaison de 12n+7 et 3n+1 donc en particulier d divise $12n+7-4(3n+1)$

c'est à dire d divise 3

b) En déduire que la fraction $\dfrac{12n+7}{3n+1}$ est irréductible

12n+7 et 3n+1 ont pour diviseur commun 1 ou 3 or 3 ne divise pas 3n+1 car 3 ne divise pas 1 donc leurseul diviseur commun est 1 d'où la fraction est irréductible

Exercice 2 :

Soient p et q deux entiers naturels tels que $p^2 - 2q^2 = 1$

1) Trouver deux entiers p et q vérifiant cette relation et tels que : $1 \le p \le 4$ et $1 \le q \le 4$

(p ; q) = (3 ; 2) convient

2) a) Démontrer que si p et q vérifient $p^2 - 2q^2 = 1$ alors p est impair

$p^2 = 2q^2 + 1 = 2k + 1$ donc p^2 est impair et on sait alors que p aussi est impair

b) En déduire alors que q est pair

p est impair donc p = 2k+1 d'où $(2k+1)^2 - 2q^2 = 1$

$$4k^2 + 4k + 1 - 2q^2 = 1$$

$$q^2 = 2k^2 + 2k = 2K$$

donc q^2 est pair et q aussi

Exercice 3 : Voir DM2