DS les nombres complexes
Terminale math expert
Vendredi 23 septembre

Exercice 1(8 points) **:** On donne les nombres complexes suivants:

$$z_1 = -i(5-4i)-(1+3i)^2 \quad , \quad z_2 = (1+i)^5 \quad \text{et} \quad z_3 = \frac{(1+i)^2}{2-4i}$$

a) Déterminer la forme algébrique de z_1 et z_2

$z_1 = -5i-4-(1+6i-9) = 4-11i$ $\qquad$ $z_2 = (1+i)^2(1+i)^2(1+i) = 2i\times 2i\times(1+i) = -4-4i$

b) Déterminer la forme algébrique du conjugué de z_3

$z_3 = \dfrac{(2i)(2+4i)}{(2-4i)(2+4i)} = \dfrac{4i-8}{4+16} = \dfrac{i-2}{5}$ donc le conjugué est $\dfrac{-i-2}{5}$

c) Déterminer la forme algébrique de Z = $\overline{z_1 - i z_3 + 2iz_2}$

$Z = \overline{z_1} + i\overline{z_3} - 2i\overline{z_2} = 4+11i+i\left(\dfrac{-i-2}{5}\right)-2i(-4+4i) = 4+11i+\dfrac{1}{5}-\dfrac{2i}{5}+8i+8 = \dfrac{61}{5}+\dfrac{93i}{5}$

Exercice 2 (6 points) **:** Résoudre dans C les équations suivantes: (on pourra éventuellement écrire z = x+ iy)

1) $(1+2i)(z-3i) = z+2+3i$

$z-3i+2iz+6 = z+2+3i$

$2iz = 6i-4$

$z = 3 - \dfrac{4}{2i} = 3+2i$

2) $\dfrac{2-3z}{z+i} = -2i+z \qquad z \neq -i$

$2-3z = (-2i+z)(z+i)$

$2-3z = -2iz+2+z^2+iz$

$0 = z^2+(-i+3)z$

$0 = z(z+3-i)$

z = 0 ou z = $-3+i$

3) $i\overline{z}+2(z-5) = 0$

on poise z = x +iy

$i(x-iy)+2(x+iy-5) = 0$

$ix+y+2x+2iy-10 = 0$

$$\begin{cases} y+2x-10=0 \\ x+2y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-2y \\ y-4y-10=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-2y \\ -3y=10 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\dfrac{20}{3} \\ y=-\dfrac{10}{3} \end{cases}$$

$z = \dfrac{20-10i}{3}$

4) $2z^2+2z+1=0$

$\Delta = 4-8 = -4 < 0$ deux racines complexes

$z_1 = \dfrac{-2-2i}{4} = \dfrac{-1-i}{2}$ $\qquad z_2 = \dfrac{-2+2i}{4} = \dfrac{-1+i}{2}$

<u>Exercice 3 (3 points) :</u>

Soit x un nombre réel. On considère le nombre complexe z défini par l'égalité: $z = (x+2i)(1-xi)$

1) Déterminer l'écriture algébrique du nombre complexe z .

$z = x-x^2 i+2i+2x = 3x+i(-x^2+2)$

2) Pour quelle(s) valeur(s) de x , z est un nombre réel ?

z réel si et seulement si partie imaginaire = 0

z réel si et seulement si $-x^2+2 = 0$

z réel si et seulement si $x = \pm\sqrt{2}$

3) Pour quelle(s) valeur(s) de x , z est un nombre imaginaire pur ?

z imaginaire pur si et seulement si partie réelle = 0

z imaginaire pur si et seulement si $3x = 0$

z réel si et seulement si $x = 0$

<u>Exercice 4 (3 points) :</u> Soit z un nombre complexe qui n'est pas réel et u un complexe différent de 1

On pose : $Z = \dfrac{z-u\bar{z}}{1-u}$

1) Donner la forme de $\bar{Z} = \dfrac{\bar{z}-\bar{u}z}{1-\bar{u}}$

2) Démontrer que Z est réel si et seulement si $u\bar{u}=1$

Z réel si et seulement si $Z = \bar{Z}$

Z réel si et seulement si $\dfrac{z-u\bar{z}}{1-u} = \dfrac{\bar{z}-\bar{u}z}{1-\bar{u}}$

comme $u \neq 1$, $\bar{u} \neq 1$ d'où

Z réel si et seulement si $(z-u\bar{z})\times(1-\bar{u}) = (\bar{z}-\bar{u}z)\times(1-u)$

Z réel si et seulement si $z-z\bar{u}-u\bar{z}+u\bar{u}\bar{z} = \bar{z}-u\bar{z}-z\bar{u}+u\bar{u}z$

Z réel si et seulement si $z-z\bar{u}-u\bar{z}+u\bar{u}\bar{z} = \bar{z}-u\bar{z}-z\bar{u}+u\bar{u}z$

Z réel si et seulement si $z-\bar{z}-u\bar{u}(z-\bar{z}) = 0$

Z réel si et seulement si $(z-\bar{z})(1-u\bar{u}) = 0$

or on sait que z n'est pas réel donc $z \neq \bar{z}$ d'où $z - \bar{z} \neq 0$ d'où

Z réel si et seulement si $1-u\bar{u} = 0$

Z réel si et seulement si $u\bar{u}=1$

<u>Remarque :</u> pour tout l'exercice, il n'est pas conseillé d'écrire z et u sous forme algébrique