DM Math experte

<u>Exercice 1 :</u> Triangulariser une matrice

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Pour x un nombre réel, on pose $f(x) = \det(A - xI_2)$.

a) Démontrer que f est une fonction polynomiale de degré 2.

b) Résoudre alors $f(x) = 0$.

2. Déduire de la question précédente que le système $(A - I_2)X = 0$ admet une infinité de solutions. Déterminer une solution X.

3. On pose $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.

b) Montrer que le calcul $P^{-1}AP$ donne une matrice triangulaire. On notera cette matrice T.

4. Calculer T^2, T^3 et conjecturer une expression de T^n pour tout entier naturel n non nul. Démontrer cette conjecture.

5. Déduire des questions précédentes la valeur de A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

<u>Exercice 2 :</u> Les quaternions

On considère l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients complexes, noté $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. On note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$.

À tout couple de nombres complexes $(z_1 ; z_2)$, on associe la matrice $M(z_1 ; z_2) = \begin{pmatrix} z_1 & -\overline{z_2} \\ z_2 & \overline{z_1} \end{pmatrix}$. On désigne par H l'ensemble des matrices $M(z_1 ; z_2)$ pour tout couple de complexes $(z_1 ; z_2)$.

1. Montrer que toute matrice de H peut s'écrire de manière unique sous la forme $aI + bJ + cK + dL$, où a, b, c et d sont des réels.

2. Montrer que le produit de deux matrices de H est une matrice de H.

3. Le produit matriciel dans H est-il commutatif ?