DM2 **Exercice 3 : de l'interro d'arithmétique**

1) Démontrer que pour tout entier relatif k, k^3-k est divisible par 3

2) Démontrer que, si trois entiers relatifs x , y , z sont tels que la somme A = $x^3+y^3+z^3$ est divisible par 3 alors la somme B = x + y + z est aussi divisible par 3 .

On pourra considérer la différence A – B

3) On suppose dans cette question que $x^3+y^3+z^3$ est divisible par 9

a) Démontrer alors que $(x+y+z)^3-(x^3+y^3+z^3)$ est divisible par 9

b) On admet que $(x+y+z)^3-(x^3+y^3+z^3) = 3(x+y)(x+z)(y+z)$

Déduire du 3a que $(x+y)(x+z)(y+z)$ est divisible par 3 et qu'alors l'un au moins des trois nombres x , y ou z est divisible par 3

Exercice 3 :

1) Démontrer que pour tout entier relatif k, k^3-k est divisible par 3

$k^3-k = k(k^2-1) = k(k-1)(k+1)$ trois entiers consécutifs donc il y en a un divisible par 3

2) Démontrer que, si trois entiers relatifs x , y , z sont tels que la somme A = $x^3+y^3+z^3$ est divisible par 3 alors la somme B = x + y + z est aussi divisible par 3 .

On pourra considérer la différence A – B

$$A - B = x^3-x+y^3-y+z^3-z = 3k+3k'+3k''` = 3K$$

$A-B$ est donc divisible par 3 donc B = $A-3K$ = 3K' car A est divisible par 3

3) On suppose dans cette question que $x^3+y^3+z^3$ est divisible par 9

a) Démontrer alors que $(x+y+z)^3-(x^3+y^3+z^3)$ est divisible par 9

$x^3+y^3+z^3$ est divisible par 9 donc par 3 d'où d'après la question 2) , x+y+z est divisible par trois ce qui donne

$$(x+y+z)^3-(x^3+y^3+z^3) = (3k)^3-9k' = 9(3k^3-k') = 9\text{ K CQFD}$$

b) On admet que $(x+y+z)^3-(x^3+y^3+z^3) = 3(x+y)(x+z)(y+z)$

Déduire du 3a que $(x+y)(x+z)(y+z)$ est divisible par 3 et qu'alors l'un au moins des trois nombres x , y ou z est divisible par 3

D'après le 3a) , $3(x+y)(x+z)(y+z)$ est divisible par 9 donc $(x+y)(x+z)(y+z)$ par 3 .

On a donc l'un de ces facteurs qui est divisible par 3 par exemple supposons x+y divisible par 3 donc 3 divise x+y et 3 divise x+y+z d'où 3 divise $(x+y+z)-(x+y)$ c'est à dire 3 divise z

On peut reproduire ce raisonnement avec x+z ou y+z