DM Terminale math expert

Les 3 questions sont indépendantes

1) Pour tout n $\in \mathbb{N}$, calculer i^n

$i^0 = 1$

$i^1 = i$

$i^2 = -1$

$i^3 = -i$

$i^4 = 1$

On retrouve une valeur déjà obtenue donc comme un entier peut s'écrire 4k , 4k+1 , 4k+2 , 4k+3 , on a :

$i^{4k} = (i^4)^k = 1$

$i^{4k+1} = i^{4k} \times i = i$

$i^{4k+2} = i^{4k} \times i^2 = -1$

$i^{4k+3} = i^{4k} \times i^3 = -i$

2) a) Quels sont les nombres complexes dont le carré est un nombre réel ?

$(a+ib)^2 = a^2 - b^2 + 2iab$

on cherche a et b pour avoir un réel donc 2ab = 0 d'où a = 0 ou b = 0

donc z = a ou z = ib

b) Quels sont les nombres complexes dont le carré est un nombre imaginaire pur ?

Ici on veut $a^2 - b^2 = 0$ c'est à dire $(a-b)(a+b) = 0$

$a - b = 0$ ou a + b = 0

a = b ou b = –a

donc z = a+ai ou z = a – ai

3) On considère le polynôme P défini dans C par : P(z) = $z^4 - 6z^3 + 23z^2 - 34z + 26$

a) Démontrer que pour tout z $\in$ C , $P(\overline{z}) = \overline{P(z)}$

Facile

b) Calculer P(1+i)

On trouve 0

c) En déduire deux solutions de l'équation P(z) = 0

1+i est solution mais on a alors $P(\overline{1+i}) = \overline{P(1+i)} = 0$ donc $1-i$ est aussi solution

d) On admet que :

Si un polynôme P admet un racine z_0 alors ce polynôme est factorisable par $z - z_0$

En déduire que P est factorisable par un polynôme Q du second degré que l'on explicitera

On peut donc factoriser P par $z-(1+i)$ ou $z-(1-i)$ donc par

$(z-(1+i))(z-(1-i)) = z^2-(1-i)z-(1+i)z+(1+i)(1-i) = z^2+(-1+i-1-i)z+2$

d'où Q(z) = $z^2 - 2z + 2$

e) Déterminer le polynôme R tel que P(z) = Q(z)R(z)

P(z)= $(z^2-2z+2)\mathrm{R}(z)$ = $(z^2-2z+2)(az^2+bz+c)$ = $az^4+(b-2a)z^3+(c-2b+2a)z^2+(-2c+2b)z+2c$

= $z^4-6z^3+23z^2-34z+26$

d'où $\begin{cases} a=1 \\ b-2a=-6 \\ c-2b+2a=23 \\ -2c+2b=-34 \\ 2c=26 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} a=1 \\ b=-4 \\ c=13 \end{cases}$ d'où R(z) = $z^2-4z+13$

f) Résoudre dans C : P(z) = 0

On a alors $z^2-2z+2=0$ qui a pour solution z = 1+i et z = $1-\mathrm{i}$

et R(z) = 0

Δ = $16-4\times 13$ = -36 < 0 donc deux solutions complexes

z_1 = $\frac{4-6\mathrm{i}}{2}$ = $2-3\mathrm{i}$ ou z = z_2 = $2+3\mathrm{i}$

S = { $2-3\mathrm{i}$; $2+3\mathrm{i}$; $1+\mathrm{i}$; $1-\mathrm{i}$ }