DS Terminale math expert

Exercice 1 : Les questions sont indépendantes

1) Déterminer l'entier n dans chacun des cas suivants :

a) $6000 \equiv n\ [19]$ et $38 \leq n < 57$

$6000 = 315 \times 19 + 15$ donc $6000 \equiv 15(19) \equiv 15 + 2 \times 19\ (19) \equiv 53\ (19)$

b) $-2013 \equiv n\ [74]$ et $0 \leq n < 74$

$-2013 = 74 \times (-28) + 59$ donc $-2013 \equiv 59(74)$

2) a) Démontrer que, pour tout entier naturel k, on a : $2^{3k} \equiv 1\ (7)$

$2^{3k} = (2^3)^k = 8^k$ or $8 \equiv 1\ (7)$ donc $2^{3k} \equiv 1(7)$

b) Quel est le reste dans la division euclidienne de 16^{2009} par 7 ?

$16 \equiv 2(7)$ donc $16^{2009} \equiv 2^{2009}\ (7)$ or $2009 = 3*669 + 2$ donc

$2^{2009} = (2^3)^{669} \times 2^2\ (7) \equiv 1^{669} \times 4\ (7)$ donc le reste est 4

c) Quel est le reste dans la division euclidienne par 17 de $16^{2n+1} + 18^n$, n étant un entier naturel.

$16 \equiv -1(17)$ et $18 \equiv 1(17)$ donc $16^{2n+1} + 18^n \equiv (-1)^{2n+1} + 1^n\ (17) \equiv 0(17)$ le reste est 0

3) x est un entier naturel non nul. La proposition suivante est-elle vraie ou fausse :

si $x^3 \equiv 0\ (9)$ alors $x \equiv 0\ (3)$

x modulo 9	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x^3 modulo 9	0	1	8	0	1	8	0	1	8

Si $x^3 \equiv 0(9)$ alors $x \equiv 0(9)$ ou $x \equiv 3\ (9)$ ou $x \equiv 6\ (9)$

ainsi x peut s'écrire 9k , 9k+3 , 9k+6 d'où x est divisible par 3

4) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $2^{n+2} + 3^{2n+1}$ est divisible par 7

$2^{n+2} + 3^{2n+1} = 2^n \times 4 + 9^n \times 3 \equiv 2^n \times 4 + 2^n \times 3\ (7) \equiv 2^n(4+3)(7) \equiv 2^n \times 7(7) \equiv 0(7)$

Exercice 2 :

On considère l'équation $(F) : 11x^2 - 7y^2 = 5$, où x et y sont des entiers relatifs.

1) Démontrer que si le couple $(x\ ;\ y)$ est solution de (F), alors $x^2 \equiv 2y^2 \mod 5$.
2) Soient x et y des entiers relatifs. Recopier et compléter (sans justification) les deux tableaux suivants :

Modulo 5, x est congru à	0	1	2	3	4
Modulo 5, x^2 est congru à					

Modulo 5, y est congru à	0	1	2	3	4
Modulo 5, $2y^2$ est congru à					

Quelles sont les valeurs possibles du reste de la division euclidienne de x^2 et de $2y^2$ par 5 ?

3) En déduire que si le couple $(x\ ;\ y)$ est solution de (F), alors x et y sont des multiples de 5.
4) Démontrer que si x et y sont des multiples de 5, alors le couple $(x\ ;\ y)$ n'est pas solution de (F). Que peut-on en déduire pour l'équation (F) ?

1) $11 \equiv 1$ (5) $7 \equiv 2$ (5) et $5 \equiv 0$ (5) donc par compatibilité des congruences on a $x^2-2y^2 \equiv 0$ (5) c'est à dire $x^2 \equiv 2y^2$ (5)

2)

x modulo 5	0	1	2	3	4
x^2 modulo 5	0	1	4	4	1
$2y^2$ modulo 5	0	2	3	3	2

x^2 a donc pour restes 0 1 ou 4

$2y^2$ a donc pour reste 0 2 ou 3

3) On sait que si (x,y) est solution de (F) alors $x^2 \equiv 2y^2$ (5) d'où x^2 et $2y^2$ ont le même reste dans la division par 5 c'est à dire 0 et d'après le tableau on a alors x congru à 0 modulo 5 cad x multiple de 5

4) Si x et y sont multiples de 5 alors x = 5k et y = 5k' d'où $11x^2-7y^2 = 5$ devient

$11\times 25k^2-7\times 25k'^2 = 5$

d'où $11\times 5k^2-7\times 5k'^2=1$

on peut donc écrire 1 = $5(11k^2-7\times k'^2)$

ce qui n'a pas de sens

donc x et y ne sont pas multiples de 5 et en conclusion l'équation F n'a pas de solutions

<u>Exercice 3 :</u>

Le phare des baleines **2 points**

A la pointe ouest de l'île de Ré, se situe le grand phare des baleines. L'escalier qui mène au sommet a un nombre de marches compris entre 246 et 260.
Ted et Laure sont deux sportifs. Laure qui est plus jeune monte les marches 4 par 4 et à la fin il lui reste 1 marche. Ted, lui, monte les marches 3 par 3 et à la fin il lui reste 2 marches.
Combien l'escalier compte-t-il de marches ? On expliquera clairement la méthode utilisée.

n nombre de marches donc Ted : n con 1(4) et n con 2(3)

donc $n-1$ = 4k et $n-2 = 3k'$ avec un nombre de marche entre 246 et 260 d'où

$246 \leq 4k+1 \leq 260$ et $246 \leq 3k'+2 \leq 260$

$61{,}25 \leq k \leq 64{,}75$ et $81{,}3 \leq k' \leq 86$

On a donc comme valeur possibles de k : 62 , 63 , 64 ce qui donne n = 249 , 253 , 257

ou k' : 82 , 83 , 84 , 85 , 86 ce qui donne pour n = 248 , 251 , 254 , 257 , 260

Point commun : n = 257