Corrige DS Math expertes du 14 octobre

Exercice 1 :

1) a) P(4) = $4^3-3\cdot4^2-3\cdot4-4$ = $64-48-12-4$ = 0

b) On peut donc factoriser P par z-4 c'est à dire :

P(z) = $(z-4)(az^2+bz+c)$ = $az^3+(-4a+b)z^2+(-4b+c)-4c$

Par identification, il vient :

$$\begin{cases} a=1 \\ -4a+b=-3 \\ -4b+c=-3 \\ -4c=-4 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=1 \end{cases} \text{ on a donc } \mathrm{P}(z)=(z-a)(z^2+z+1)$$

c) P(z)=0 ssi $z-4=0$ ou $z^2+z+1=0$

Δ = -3 < 0 donc deux racines complexes

$$z_1=\frac{-1-\sqrt{3}}{2} \text{ ou } z_2=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$$

S = { 4 ; $\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$; $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ }

2) $z^3-1000=z^3-10^3=(z-10)(z^2+10z+100)$

<u>Exercice 2 :</u> QCM

Q1 : $2z^2+8z+10$

Δ = $64-80=-16$ <0 donc deux racines complexes

$z_1=\frac{-8-4\mathrm{i}}{4}$ = $-2-\mathrm{i}$ et $z_2=\frac{-8+4\mathrm{i}}{4}$ = $-2+\mathrm{i}$

On peut donc factoriser : $\mathrm{P}(z)=2(z+2+\mathrm{i})(z+2-\mathrm{i})$

Réponse c)

Q2 : On pose Z = z^2 et l'équation dévient $-2Z^2-6Z+8=0$ de solutions -4 et 1 d'où $z^2=1$ donne $z=\pm1$ et $z^2=-4=4\mathrm{i}^2$ donc $z=\pm2\mathrm{i}$

Réponse d)

Q3 : $z-3\mathrm{i}=0$ donc $z=3\mathrm{i}$ imaginaire pur puis z^2-2z+3

$\Delta=-8$ <0 deux racines complexes :

$z_1=\frac{2-2\sqrt{2}\mathrm{i}}{2}$ et $z_2=\frac{2+2\sqrt{2}\mathrm{i}}{2}$

$z_1=1-\sqrt{2}\mathrm{i}$ et $z_2=1+\sqrt{2}\mathrm{i}$

Donc trois racines complexes on ne peut rien dire d'autres : réponse d)

Q4 : Facile c'est le cours réponse d)

<u>Exercice 3 :</u>

1) $(\mathrm{i}y)^3+(2-2\mathrm{i})(\mathrm{i}y)^2+(4-4\mathrm{i})(\mathrm{i}y)-8\mathrm{i}=0$

$-\mathrm{i}y^3-2y^2+2\mathrm{i}y^2+4\mathrm{i}y+4y-8\mathrm{i}=0$

$-2y^2+4y+\mathrm{i}(-y^3+2y^2+4y-8)=0$

Un complexe est nul si sa partie imaginaire et sa partie réelle sont nulles donc

$-2y^2+4y=0$ et $-y^3+2y^2+4y-8=0$

d'où la réponse

2) $-2y^2+4y=0$ donne $y=0$ ou $y=2$
or y=0 n'est pas solution de $-y^3+2y^2+4y-8=0$ donc il ne convient pas et il ne reste que y=2 qui est solution de $-y^3+2y^2+4y-8=0$
d'où $z=2\mathrm{i}$ est solution de l'équation. On peut donc factoriser par $z-2\mathrm{i}$:

$$\begin{aligned} z^3+(2-2\mathrm{i})z^2+(4-4\mathrm{i})z-8\mathrm{i} &= (z-2\mathrm{i})(az^2+bz+c) \\ &= az^3-2\mathrm{i}az^2+bz^2-2\mathrm{i}bz+cz-2\mathrm{i}c \\ &= az^3+(-2\mathrm{i}a+b)z^2+(-2\mathrm{i}b+c)z-2\mathrm{i}c \end{aligned}$$

Par identification, il vient :

$$\begin{cases} a=1 \\ -2\mathrm{i}a+b=2-2\mathrm{i} \\ -2\mathrm{i}b+c=4-4\mathrm{i} \\ -2\mathrm{i}c=-8\mathrm{i} \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ c=4 \end{cases}$$

donc

$$z^3+(2-2\mathrm{i})z^2+(4-4\mathrm{i})z-8\mathrm{i}=(z-2\mathrm{i})(z^2+2z+4)$$

3) $z=2\mathrm{i}$ ou $z^2+2z+4=0$

$\Delta=-12<0$ deux racines complexes

$$z_1=\frac{-2+\sqrt{12}\mathrm{i}}{2} \quad \text{ou} \quad z_2=\frac{-2-\sqrt{12}\mathrm{i}}{2}$$

$$z_1=-1+\sqrt{3}\mathrm{i} \quad \text{ou} \quad z_2=-1-\sqrt{3}\mathrm{i}$$