

DS1 math expert
Nombres complexes

22 septembre

Exercice 1 :

1) $z=(1-3i)^2(-8+6i) = (1-6i-9)(-8+6i) = (-8-6i)(-8+6i) = 64+36 = 100$

2) $z = \frac{2-5i}{3+i} = \frac{(2-5i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{6-2i-15i-5}{10} = \frac{1-17i}{10}$

3) $\frac{i(2-i)^2}{-3+i} = \frac{i(4-4i-1)}{-3+i} = \frac{3i+4}{-3+i} = \frac{(3i+4)(-3-i)}{(-3+i)(-3-i)} = \frac{-9i+3-12-4i}{10} = \frac{-9-13i}{10}$

Le conjugué est donc $\frac{-9+13i}{10}$

Exercice 2 :

1) $-2iz=3z+1$ donc $(-3-2i)z=1$ cad $z = \frac{1}{-3-2i} = \frac{-3+2i}{13}$

2) $\frac{z-i}{z-(2-i)}=3i$ donc $z-i=3i(z-(2-i))$ cad $z-i=3iz-3i(2-i)$

$$(1-3i)z=-5i-3$$

$$z = \frac{-3-5i}{1-3i} = \frac{(-3-5i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)} = \frac{12-14i}{10}$$

3) $z+3+i=2\bar{z}+7+3i$

$$x+iy+3+i=2x-2iy+7+3i$$

$$x+3+i(y+1)=2x+7+i(-2y+3)$$

on identifie les parties réelle et imaginaire :

$$\begin{cases} x+3=2x+7 \\ y+1=-2y+3 \end{cases} \text{ cad } \begin{cases} x=-4 \\ y=\frac{2}{3} \end{cases} \text{ donc } z=-4+\frac{2}{3}i$$

Exercice 3 :

1) Le conjugué de $Z = \frac{z^2 - \bar{z}^2}{z\bar{z}+3}$ est $-Z$ donc on a $\bar{Z} = -Z$ donc imaginaire pur

2) $z^2+(1-i)z-2-2i = (1+i)^2+(1-i)(1+i)-2-2i = 2i+2-2-2i=0$ donc VRAI

3) Soit $z=1+i$ on a donc $z^{17} + \bar{z}^{17} = Z + \bar{Z} = 2 \operatorname{Re}(Z)$ donc nombre réel

Exercice 4 :

$$1) f(-1+i\sqrt{3}) = 2(-1+i\sqrt{3})^2 - 3i(-1+i\sqrt{3}) = 2(1-2i\sqrt{3}-3) + 3i + 3\sqrt{3} = -4 - 4i\sqrt{3} + 3i + 3\sqrt{3} = -4 + 3\sqrt{3} + i(3 - 4\sqrt{3})$$

$$2) f(z) = 2(x+iy)^2 - 3i(x+iy) = 2(x^2 + 2ixy - y^2) - 3ix + 3iy = 2x^2 - 2y^2 + 3iy + i(4xy - 3x)$$

$$3) \text{ On veut } f(z) \text{ réel donc } 2xy - 3x = 0$$

$$x(2y - 3) = 0$$

$$x=0 \text{ ou } y = \frac{3}{2}$$

$$\text{donc } z = iy \text{ ou } z = x + \frac{3}{2}i$$