

Le 24 janvier 2021

1 heure

Exercice 1: On donne les matrices $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Partie A

1) Calculer la matrice M^2 . On donne $M^3 = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 11 \\ 12 & 2 & 9 \\ 42 & 20 & 21 \end{pmatrix}$

$$M^2 = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \\ 10 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

2) Déterminer la valeur de l'entier naturel a pour lequel $M^3 = M^2 + 8M + a \times I$

$$M^2 + 8M + aI = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \\ 10 & 4 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 8 & 8 \\ 8 & -8 & 8 \\ 32 & 16 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14+a & 10 & 11 \\ 12 & -4+a & 9 \\ 42 & 20 & 15+a \end{pmatrix}$$

En égalant avec les coefficients de M^3 , il vient : $\begin{cases} 14+a=20 \\ -4+a=2 \\ 15+a=21 \end{cases}$ ce qui donne $a = 6$

3) En déduire que M est inversible et que $M^{-1} = \frac{1}{a}(M^2 - M - 8I)$

On a donc $M^3 - M^2 - 8M = 6I$

$$M(M^2 - M - 8I) = 6I$$

M est donc inversible et on a $M^{-1} = \frac{1}{6}(M^2 - M - 8I)$

Partie B

On cherche à déterminer trois nombres entiers a , b et c tels que la parabole P d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passe par les points $A(1; 7)$, $B(-1; 9)$ et $C(2; 3)$

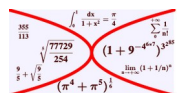
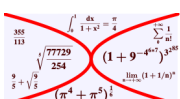
1) Démontrer que le problème revient à chercher trois entiers a , b et c tels que

On traduit l'appartenance des points à la parabole par le système : $\begin{cases} a+b+c=7 \\ a-b+c=9 \\ 4a+2b+c=3 \end{cases}$ ce qui donne

$$M \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2) Calculer a , b et c

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}$$



Exercice 2 : Soit les matrices $M = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 \\ 0,2 & 0,9 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

1) Justifier par un calcul que M est inversible et donner M^{-1}

$$\det(M) = 0,8 \times 0,9 - 0,2 \times 0,1 = 0,7 \neq 0 \text{ donc } M \text{ est inversible et on a } M^{-1} = \frac{1}{0,7} \begin{pmatrix} 0,9 & -0,1 \\ -0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$$

2) Calculer la matrice P^2 . En déduire que P est inversible et donner P^{-1} en fonction de P

$$P^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 3I \text{ donc } P \text{ est inversible et on a } P \times \left(\frac{1}{3}P\right) = I \text{ d'où } P^{-1} = \frac{1}{3}P$$

3) Montrer que la matrice $D = P^{-1}MP$ est une matrice diagonale que l'on déterminera

Donner alors la matrice D^n

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,7 \end{pmatrix} \text{ et } D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,7^n \end{pmatrix}$$

4) Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n non nul, $M^n = PD^nP^{-1}$

Facile voir cahier d'exercice

5) Calculer la matrice M^n pour tout entier naturel n non nul

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,7^n \end{pmatrix} * \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1+2 \times 0,7^n & 1-0,7^n \\ 2-2 \times 0,7^n & 2+0,7^n \end{pmatrix}$$

Exercice 3 : Une matrice carrée A est dite idempotente si $A^2 = A$

1) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Traduire par un système que A est idempotente

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+dc & bc+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ d'où } \begin{cases} a^2+bc=a \\ ab+bd=b \\ ac+dc=c \\ bc+d^2=d \end{cases}$$

2) Résoudre le système dans les cas suivants :

a) $b = 0$ (4 matrices possibles)

$$\text{le système devient } \begin{cases} a^2 = a \\ ac + dc = c \\ d^2 = d \end{cases}$$

$a^2 = a$ donc $a^2 - a = 0$ $a(a-1) = 0$ $a = 0$ ou $a = 1$. De même, on a donc $d = 0$ ou $d = 1$ on a donc 4 combinaisons possibles :

$$\begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ d=0 \\ c=0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ d=0 \\ c \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ d=1 \\ c \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ d=1 \\ c=0 \end{cases}$$

b) $b = 1$ (On exprimera A en fonction de a)

$$\text{Le système devient } \begin{cases} a^2+c=a \\ a+d=1 \\ ac+dc=c \\ c+d^2=d \end{cases} \begin{cases} c=a-a^2 \\ d=1-a \\ b=1 \end{cases} \text{ La matrice est donc } \begin{pmatrix} a & 1 \\ a-a^2 & 1-a^2 \end{pmatrix}$$

