DS Math expert Les matrices

Le 24 janvier 2021

1 heure

Exercice 1: On donne les matrices $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Partie A

1) Calculer la matrice M^2. On donne $M^3 = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 11 \\ 12 & 2 & 9 \\ 42 & 20 & 21 \end{pmatrix}$

$$M^2 = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \\ 10 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

2) Déterminer la valeur de l'entier naturel a pour lequel $M^3 = M^2 + 8M + a \times I$

$$M^2 + 8M + aI = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \\ 10 & 4 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 8 & 8 \\ 8 & -8 & 8 \\ 32 & 16 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14+a & 10 & 11 \\ 12 & -4+a & 9 \\ 42 & 20 & 15+a \end{pmatrix}$$

En égalant avec les coefficients de M^3, il vient : $\begin{cases} 14+a=20 \\ -4+a=2 \\ 15+a=21 \end{cases}$ ce qui donne a = 6

3) En déduire que M est inversible et que $M^{-1} = \frac{1}{a}(M^2 - M - 8I)$

On a donc $M^3 - M^2 - 8M = 6I$

$M(M^2 - M - 8I) = 6I$

M est donc inversible et on a $M^{-1} = \frac{1}{6}(M^2 - M - 8I)$

Partie B

On cherche à déterminer trois nombres entiers a , b et c tels que la parabole P d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passe par les poins A (1 ; 7), B (-1 ; 9) et C(2 ; 3)

1) Démontrer que le problème revient à chercher trois entiers a , b et c tels que

On traduit l'appartenance des points à la parabole par le système : $\begin{cases} a+b+c=7 \\ a-b+c=9 \\ 4a+2b+c=3 \end{cases}$ ce qui donne

$$M \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2) Calculer a , b et c

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 : Soit les matrices M = $\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}9 \end{pmatrix}$ et P = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

1) Justifier par un calcul que M est inversible et donner M^{-1}

det(M) = $0{,}8\times0{,}9-0{,}2\times0{,}1$ = 0,7 ≠ 0 donc M est inversible et on a $M^{-1} = \dfrac{1}{0{,}7}\begin{pmatrix} 0{,}9 & -0{,}1 \\ -0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$

2) Calculer la matrice P^2 . En déduire que P est inversible et donner P^{-1} en fonction de P

$P^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ = 3I donc P est inversible et on a $P\times\left(\frac{1}{3}P\right)=I$ d'où $P^{-1} = \frac{1}{3}P$

3) Montrer que la matrice D = $P^{-1}MP$ est une matrice diagonale que l'on déterminera

Donner alors la matrice D^n

D = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}7 \end{pmatrix}$ et $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}7^n \end{pmatrix}$

4) Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n non nul, $M^n = PD^nP^{-1}$

Facile voir cahier d'exercice

5) Calculer la matrice M^n pour tout entier naturel n non nul

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}7^n \end{pmatrix} * \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+2\times0{,}7^n & 1-0{,}7^n \\ 2-2\times0{,}7^n & 2+0{,}7^n \end{pmatrix}$$

Exercice 3 : Une matrice carrée A est dite idempotente si $A^2=A$

1) Soit la matrice A = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Traduire par un système que A est idempotente

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+dc & bc+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ d'où } \begin{cases} a^2+bc=a \\ ab+bd=b \\ ac+dc=c \\ bc+d^2=d \end{cases}$$

2) Résoudre le système dans les cas suivants :

a) b = 0 (4 matrices possibles)

le système devient $\begin{cases} a^2=a \\ ac+dc=c \\ d^2=d \end{cases}$

a^2 = a donc $a^2-a=0$ $a(a-1)=0$ a = 0 ou a = 1 . De même, on a donc d = 0 ou d = 1 on a donc 4 combinaisons possibles :

$$\begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ d=0 \\ c=0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ d=0 \\ c \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ d=1 \\ c \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ d=1 \\ c=0 \end{cases}$$

b) b = 1 (On exprimera A en fonction de a)

Le système devient $\begin{cases} a^2+c=a \\ a+d=1 \\ ac+dc=c \\ c+d^2=d \end{cases}$ $\begin{cases} c=a-a^2 \\ d=1-a \\ b=1 \end{cases}$ La matrice est donc $\begin{pmatrix} a & 1 \\ a-a^2 & 1-a^2 \end{pmatrix}$