DS Math expert   Les matrices

Le 24 janvier 2021

1 heure

Exercice 1: On donne les matrices M = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et I = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Partie A

1) Calculer la matrice M^2. On donne $M^3 = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 11 \\ 12 & 2 & 9 \\ 42 & 20 & 21 \end{pmatrix}$

2) Déterminer la valeur de l'entier naturel a pour lequel $M^3 = M^2 + 8M + a \times I$

3) En déduire que M est inversible et que $M^{-1} = \frac{1}{a}(M^2 - M - 8I)$

Partie B

On cherche à déterminer trois nombres entiers a , b et c tels que la parabole P d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passe par les poins A (1 ; 7), B (-1 ; 9) et C(2 ; 3)

1) Démontrer que le problème revient à chercher trois entiers a , b et c tels que

$$M \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2) Calculer a , b et c

Exercice 2 : Soit les matrices M = $\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}9 \end{pmatrix}$ et P = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

1) Justifier par un calcul que M est inversible et donner M^{-1}

2) Calculer la matrice P^2 . En déduire que P est inversible et donner P^{-1} en fonction de P

3) Montrer que la matrice D = $P^{-1}MP$ est une matrice diagonale que l'on déterminera

Donner alors la matrice D^n

4) Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n non nul, $M^n = PD^nP^{-1}$

5) Calculer la matrice M^n pour tout entier naturel n non nul

Exercice 3 : Une matrice carrée A est dite idempotente si $A^2 = A$

1) Soit la matrice A = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Traduire par un système que A est idempotente

2) Résoudre le système dans les cas suivants :

a) b = 0 (4 matrices possibles)

b) b = 1 (On exprimera A en fonction de a)