DM Terminales Math Expert

Exercice n°1

a) Trouver, sans calculatrice, le reste de la division euclidienne de 12^{1527} par 5

$12 \equiv 2$ (5) donc $12^{1527} \equiv 2^{1527}$ (5)

$2^0 \equiv 1(5)$

$2^1 \equiv 2(5)$

$2^2 \equiv 4(5)$

$2^3 \equiv 8(5) \equiv 3(5)$

$2^4 \equiv 6(5) \equiv 1(5)$

Comme $1527 = 4*381+3$, il vient $2^{1527} \equiv (2^4)^{381} \times 2^3 \ (5)$

$2^{1527} \equiv 1^{381} \times 3(5)$

donc $12^{1527} \equiv 3(5)$

Le reste est donc 3

b) Trouver, sans calculatrice, le reste de la division euclidienne de $1653^{351}+43^{137}$ par 11

$1653 = 11 \times 150+3$ donc $1653 \equiv 3(11)$ et $43 \equiv -1(11)$ d'où

$A = 1563^{351}+43^{137} \equiv 3^{351}+(-1)^{137}(11) \equiv 3^{251}-1(11)$

$3^0 \equiv 1$ (11)

$3^1 \equiv 3(11)$

$3^2 \equiv 9(11)$

$3^3 \equiv 27(11) \equiv 5(11)$

$3^4 \equiv 20(11) \equiv 9(11)$

$3^5 \equiv 45(11) \equiv 1(11)$

$251 = 5 \times 50+1$ donc $3^{251} \equiv (3^5)^{50} \times 3^1(11) \equiv 1^{50} \times 3(11) \equiv 3(11)$ et $A \equiv 3-1(11) \equiv 2(11)$

Le reste est donc 2

c) Trouver, sans calculatrice, le reste de la division euclidienne de $19^{52} \times 23^{41}$ par 7

$19^{52} \times 23^{41} \equiv 5^{52} \times 2^{41}$ (7) or $5^3 \equiv -1(7)$ et $2^3 \equiv 1(7)$ d'où

comme $52 = 3 \times 17+1$ et $41 = 3 \times 13+2$, on obtient : $19^{52} \times 23^{41} \equiv (5^3)^{17} \times (5^1) \times (2^3)^{13} \times (2^2)(7)$ (7)

d'où $19^{52} \times 23^{41} \equiv (-1)^{17} \times 5 \times 1^{13} \times 4(7) \equiv -20(7) \equiv 1(7)$

d) Trouver, sans calculatrice, le reste de la division euclidienne de $7\times3^{240}+6$ par 41

$3^0 \equiv 1(41)$ $3^1 \equiv 3(41)$ $3^2 \equiv 9(41)$ $3^3 \equiv 27(41)$ $3^4 \equiv 81(41) \equiv -1(41)$ d'où

comme $240 = 4\times60$, il vient $7\times3^{240}+6 \equiv 7\times(3^4)^{60}+6\ (41) \equiv 7\times(1)+6(41) \equiv 13(41)$

Le reste est donc 13

e) Démontrer que $8^{2001}-8$ est multiple de 11

$8^1 \equiv 8(11)$ $8^2 \equiv 64(11) \equiv 9(11)$ $8^3 \equiv 72(11) \equiv 6(11)$ $8^4 \equiv 48(11) \equiv 4(11)$ $8^5 \equiv 32(11) \equiv 1(11)$

d'où comme $2001 = 5\times400+1$, il vient $8^{2001} \equiv (8^5)^{400}\times8^1 \equiv (-1)^{400}\times8(11) \equiv 8(11)$ d'où la réponse

Exercice n°2

a) Déterminer le reste dans la division euclidienne par 5 de A = $16\times7^{2n}-28\times3^{2n+3}$

$A \equiv 1\times2^{2n}-3\times3^{2n+3}(5) \equiv 2^{2n}-3^{2n+4}(5) \equiv 2^{2n}-(-2)^{2n+4}(5)$ et comme 2n+4 est pair,, il vient $A \equiv 2^{2n}-2^{2n+4}(5) \equiv 2^{2n}(1-2^4)(5) \equiv 2^{2n}\times(-15)(5) \equiv 0(5)$

Le reste est 0

b) Même question avec A = $18^{4n-1}+44^{4n-1}+3\times96^{4n+2}$

On peut noter que n > 0 car la puissance doit être positive d'où l'idée du changement de variable N = n–1 avec N ≥0 ce qui donne avec n = N+1

$A = 18^{4(N+1)-1}+44^{4(N+1)-1}+3\times96^{4(N+1)+2} = 18^{4N+3}+44^{4N+3}+3\times96^{4N+6}$

$18 \equiv 3(5)$ $44 \equiv 1(5)$ et $96 \equiv 1(5)$ donc $A \equiv 3^{4N+3}+(-1)^{4N+3}+3\times1^{4N+6}(5) \equiv 3^{4N+3}-1+3(5)$

0r $3^4 = 81$ 1(5) donc $3^{4N+3} = (3^4)^N\times3^3 \equiv 1\times3^3(5) \equiv 27(5) \equiv 2(5)$ et $A \equiv 4(5)$

Le reste est 4

c) Démontrer que pour tout entier naturel n, A = $3^{2n}+2^{6n-5}$ est un multiple de 11

Même principe n=N+1 d'où

$A = 3^{2N+2}+2^{6N+1} = 9^{N+1}+(2^6)^N\times2 \equiv (-2)^{N+1}+(-2)^N\times2(11) \equiv (-2)^N(-2+2)(11) \equiv 0(11)$

d'où la réponse

d) Déterminer, selon les valeurs de n, les restes dans la division euclidienne de A = $2^{2n+1}-2^{n+1}-1$ par 5

$2^0 \equiv 1(5)$

$2^1 \equiv 2(5)$

$2^2 \equiv 4(5)$

$2^3 \equiv 8(5) \equiv 3(5)$

$2^4 \equiv 6(5) \equiv 1(5)$

Les puissance de deux modulo 5 sont donc périodiques de période 4 d'où les cas de figure :

n=4k $A = 2^{4\times 2k+1} - 2^{4k+1} - 1$ $A \equiv 2^1 - 2^1 - 1(5)$ $A \equiv -1(5)$ $A \equiv 4(5)$	n=4k+1 $A = 2^{4\times(2k)+3} - 2^{4k+2} - 1$ $A \equiv 3-4-1(5)$ $A \equiv -2(5)$ $A \equiv 3(5)$	n=4k+2 $A = 2^{4\times(2k+1)+1} - 2^{4k+3} - 1$ $A \equiv 2-3-1(5)$ $A \equiv -2(5)$ $A \equiv 3(5)$	n=4k+3 $A = 2^{4\times(2k+1)+3} - 2^{4(k+1)} - 1$ $A \equiv 3-1-1(5)$ $A \equiv 1(5)$