<u>DM Math expertes</u>

<u>Exercice 1:</u>

Soit P le polynôme à coefficients réels défini sur C par $P(u)=u^4-1$

1) Factoriser P en produit de facteurs du premier degré à coefficient complexe

$P(u)=(u^2-1)(u^2+1) = (u-1)(u+1)(u-i)(u+i)$

2) En déduire les solutions dans C de l'équation P(u)=0

S = { 1 ; –1 ; i ; –i }

3) On considère l'équation (E) : $\left(\frac{1-2z}{z-2}\right)^4=1$

Résoudre cette équation en utilisant la première question

On pose $u=\frac{1-2z}{z-2}$ l'équation devient $u^4=1$ c'est à dire P(u) = 0

donc les solutions pour u sont d'après 2) S = { 1 ; –1 ; i ; –i }

On a donc à résoudre :

$\frac{1-2z}{z-2}=1$ ou	$\frac{1-2z}{z-2}=-1$ ou	$\frac{1-2z}{z-2}=i$ ou	$\frac{1-2z}{z-2}=-i$
$1-2z=z-2$	$1-2z=-z+2$	$1-2z=iz-2i$	$1-2z=-iz+2i$
$-3z=-3$	$-z=1$	$(-2-i)z=-1-2i$	$(-2+i)z=-1+2i$
$z=1$	$z=-1$	$z=\frac{-1-2i}{-2-i}=0{,}8+0{,}6i$	$z=\frac{-1+2i}{-2+i} = 0{,}8-0{,}6i$

<u>Exercice 2:</u>

On considère l'équation à coefficients complexes : (E) : $2z^2-(6i+14)z+8+56i=0$

1) Démontrer que l'équation (E) admet un unique nombre imaginaire pur comme solution et le déterminer.

Soit $z=iy$ on a alors : $2z^2-(6i+14)z+8+56i = 2(iy)^2-(6i+14)(iy)+8+56i =$

$-2y^2+6y-14iy+8+56i = -2y^2+6y+8+i(-14y+56) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases}-2y^2+6y+8=0\\ -14y+56=0\end{cases}$

La deuxième équation donne y=4 et 4 est aussi solution de $-2y^2+6y+8=0$ donc z=4i est solution de l'équation

2) L'équation (E) admet-elle comme solution un nombre réel ? Justifier

Soit z = x : l'équation devient $2x^2-(6i+14)x+8+56i=0$

$$2x^2-14x+8+i(-6x+56)=0$$

On doit donc avoir $-6x+56=0$ c'est à dire $x=\frac{56}{6}=\frac{28}{3}$ or $\frac{28}{3}$ n'est pas solution de $2x^2-14x+8=0$ (à vérifier) donc pas de solution réelle

3) Résoudre (E) dans C .

On factorise $2z^2-(6i+14)z+8+56i$ par $z-4i$ donc

$2z^2-(6i+14)z+8+56i=(z-4i)(az+b) = az^2+bz-4iaz-4ib = az^2+(b-4ia)z-4ib$

par identification : $\begin{cases} a=2 \\ b-4ia=-6i-14 \\ -4ib=8+56i \end{cases}$ ce qui donne a = 2 et b = $-14+2i$

d'où $2z^2-(6i+14)z+8+56i = (z-4i)(2z-14+2i)$ d'où deux solutions z = 4i et z = $7-i$

<u>Exercice 3 :</u>

A tout nombre complexe z on associe le nombre complexe z' définie par $z'=\dfrac{2i-z^2}{z\times\bar{z}+1}$

1) Justifier que z' est définie pour tout z ∈ C .

Soit z = x+iy on a alors $z\times\bar{z}+1 = x^2+y^2+1$ ≥ 1 donc ≠ 0 ainsi le dénominateur n'est jamais nul et z' est définie pour tout z ∈ C .

2) Existe-t-il des valeurs de z telle que z' soit égale à 1 ?

$\dfrac{2i-z^2}{z\times\bar{z}+1}=1 \Leftrightarrow 2i-(x+iy)^2=x^2+y^2+1 \Leftrightarrow 2i-x^2-2ixy+y^2=x^2+y^2+1$ ssi

$i(2-2xy)-2x^2-1=0$ Ainsi pour obtenir 0, il faut avoir $-2x^2-1=0$ c'est à dire $x^2=\dfrac{-1}{2}$ ce qui est impossible donc aucune valeur de z telle que z'=1

3) a) Démontrer que z' est réel si et seulement si $(z-\bar{z})(z+\bar{z})=4i$

z' réel ⇔ $z'=\overline{z'}$ ⇔ $z'=\dfrac{2i-z^2}{z\times\bar{z}+1} = \dfrac{-2i-\bar{z}^2}{z\times\bar{z}+1}$ ⇔ $2i-z^2=-2i-\bar{z}^2$ ⇔ $z^2-\bar{z}^2=4i$ ⇔ $(z-\bar{z})(z+\bar{z})=4i$

b) Déterminer les nombres complexes z tels que z' soit un réel avec z = x+iy

$z-\bar{z}=2x$ et $z+\bar{z}=2iy$ donc z' réel ⇔ $4ixy=4i$ ⇔ $xy=1$ ⇔ $y=\dfrac{1}{x}$

on a donc $z=x+\dfrac{i}{x}$

c) Déterminer les nombres complexes z tels que z' soit un imaginaire pur

z' imaginaire pur ⇔ $z'=-\overline{z'}$ ⇔ $z'=\dfrac{2i-z^2}{z\times\bar{z}+1} =- \dfrac{-2i-\bar{z}^2}{z\times\bar{z}+1}$ ⇔ $2i-z^2=2i+\bar{z}^2$ ⇔ $z^2+\bar{z}^2=0$ ⇔

$x^2+2ixy-y^2+x^2-2ixy-y^2=0$ ⇔ $x^2=y^2$ ⇔ x = $\pm y$

On a donc z = $\pm y+iy$