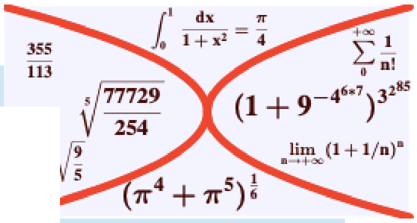
Quiziniere code 4KQ97Y TS Complexe



Question 1 :

On note $Re(Z)$ la partie réelle d'un nombre complexe Z

Répondre par vrai ou faux aux 3 affirmations suivantes en justifiant

$$Affirmation\ 1\ :\ (Re(z))^2 = Re(z^2)$$

FAUX si on pose $z = x + iy$ on a alors $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$

On a donc $Re(z^2) x^2 - y^2$ et $(Re(z))^2 = x^2$ donc faux

A noter que l'on peut aussi choisir un contre exemple comme z = i

$$Affirmation\ 2\ :\ (-\sqrt{3}+i)^6 \text{ est un imaginaire pur}$$

la calculatrice donne $(-\sqrt{3}+i)^6 = -64$ qui n'est pas un imaginaire pur

$$affirmation\ 3\ :\ l'équation\ z + z\bar{z} = 1 + i$$

admet deux solutions distinctes de partie imaginaire 1

on pose $z = x + iy$. L'équation devient $x + iy + (x+iy)(x-iy) = 1 + i$

$$x + iy + x^2 + y^2 = 1 + i$$

$$x + x^2 + y^2 + iy = 1 + i$$

On identifie alors les parties réelles et imaginaire et on trouve

$$\begin{cases} x + x^2 + y^2 = 1 \\ y = 1 \end{cases} \text{ ssi } \begin{cases} x^2 + x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \text{ ssi } \begin{cases} x(x+1) = 0 \\ y = 1 \end{cases} \text{ ssi } \begin{cases} x = 0\ ou x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$$

S = { i ; -1+i }

donc VRAI

$$Question\ 2\ :\ Soit\ z = -\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

La forme algébrique de z^2 est :

D'après BAC $z^2 = (-\sqrt{2+\sqrt{2}})^2 - 2i\sqrt{2+\sqrt{2}} \times \sqrt{2-\sqrt{2}} - (\sqrt{2-\sqrt{2}})^2$

$$z^2 = 2 + \sqrt{2} - 2i\sqrt{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} - (2-\sqrt{2})$$

$$z^2 = 2 + \sqrt{2} - 2 + \sqrt{2} - 2i\sqrt{4-2} \qquad \text{donc} \qquad z^2 = 2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}$$

Question 3 : Quelle est la solution de l'équation :

$$2z - i\overline{z} = 3 + i + 2\overline{z}$$

$$2(x+iy)-i(x-iy)=3+i+2(x-iy)$$
$$2x+2iy-ix-y=3+i+2x-2iy$$
$$2x-y+i(2y-x)=3+2x+i(1-2y)$$

On identifie les parties réelles et imaginaires :

$$\begin{cases}2x-y=3+2x\\2y-x=1-2y\end{cases} \text{ ssi } \begin{cases}y=-3\\-6-x=1+6\end{cases} \text{ ssi } \begin{cases}y=-3\\x=-13\end{cases}$$

$$z = -13-3i$$

Question 4 : Parmi les complexes suivants un seul est un imaginaire pur. Lequel ?

- [ ] $z_1 = z + \overline{z}$
- [ ] $z_2 = z^2 + \overline{z}^2$
- [x] $z_3 = z^2 - \overline{z}^2$

$z=x+iy$ donc $z_1=x+iy+x-iy$ = 2x donc faux

$z_2=(x+iy)^2+(x-iy)^2 = (x^2+2xiy-y^2)+(x^2-2xiy-y^2) = 2x^2-2y^2$ qui est réel donc faux

On peut alors vérifier que z3 est correct

Question 5 : Soit x un nombre réel et les deux nombres complexes

$$z_1 = 3x - 3 + i(x^2+1) \quad et \quad z_2 = x^2 - x + i(x^2-1)$$

$$z_1+z_2=x^2+2x-3+2ix^2$$

$a)$ *Déterminer* x *pour que* $z_1 + z_2$ *soit un imaginaire pur*

$z_1 + z_2$ imaginaire pur ssi $x^2 + 2x - 3 = 0$

$\Delta = 16 > 0$ donc

$x_1 = 1$ ou $x_2 = -3$

$b)$ *Déterminer* x *pour que* $z_1 + z_2$ *soit un réel*

$z_1 + z_2$ réel ssi $2x^2 = 0$ ssi x=0

Question 6 : On donne le développement incomplet de $(2+b)^5$:

$$32 + \ldots b + \ldots b^2 + \ldots b^3 + \ldots b^4 + \ldots b^5$$

Recopier dans l'ordre les coefficients manquants

On développe avec le binôme de newton les coefficients binomiaux à prendre étant 1 , 5 , 10 , 10 , 5 , 1

$(2+b)^5 = 2^5 + 5\times 2^4 \times b^1 + 10\times 2^3 \times b^2 + 10\times 2^2 \times b^3 + 5\times 2^1 \times b^4 + b^5$

$= 32 + 80\,b + 80\,b^2 + 40\,b^3 + 10\,b + b^5$

La réponse attendue est donc 80 – 80 – 40 – 10 – 1

Question 7 : on considère le développement de $(2x - 3y)^{10}$

Quel est le coefficient du terme $x^3 y^7$?

le coefficient est $\binom{10}{7}(2x)^3(-3y)^7 = 120 \times 8\,x^3 \times (-2187\,y^7) = 2099520$