DS Maths expertes **Jeudi 8 octobre 2020**

Exercice 1 : On pose a = 3k + 2 et b = $5k-7$ avec k ∈ $\mathbb{Z}$.

1) Montrer que si un entier d divise a et b alors d divise 31

d divise a et b donc toute combinaison de a et b en particulier d divise

$5a-3b=15k+10-15k+21=31$

2) Quels sont les diviseurs communs positifs possibles à a et b ?

Un diviseur positif de a et b est un diviseur de 31 donc 31 et 1

Exercice 2 : Soient k un entier relatif et A = $(2k+1)^2-1$

1) Factoriser A

A = $(2k+1-1)(2k+1+1)$ = $2k(2k+2)$ = $4k(k+1)$

2) Montrer que A est divisible par 8 pour tout entier relatif k

A est divisible par 4 et k(k+1) sont deux entiers consécutifs donc l'un des deux est pait d'où k(k+1) divisible par 2 d'où A divisible par $4\times 2=8$

Exercice 3 :

1) Soient n ≥ 2 et les entiers relatifs a , b , c et d tels que : a ≡ b (n) et c ≡ d (n)

Montrer que : a + c ≡ b + d (n)

2) a) Montrer que 3^3 ≡ -1 (7)

$3^3=27$ = $3\times 7+6$ donc 3^3 ≡ 6 (7) or 6 ≡ -1 (7) d'où la réponse

b) En déduire que $1515^{2004}-1$ est divisible par 7 et que le reste de la division euclidienne de 3^{2018} par 7 est 2

1515 = $216\times 7+3$ d'où 1515 ≡ 3 (7) par compatibilité avec les puissances, il vient 1515^{2004} ≡ 3^{2004} (7)

2004 = 3×668 donc $3^{2004}=(3^3)^{668}$ et comme 3^3 ≡ -1 (7) il vient 1515^{2004} ≡ $(-1)^{668}$ (7) ≡ 1 (7)

ce qui donne donc $1515^{2004}-1$ ≡ 0 (7) d'où la réponse

$2018=3\times 672+2$ donc 3^{2018} ≡ $(3^3)^{672}\times 3^2$ (7) ≡ $(-1)^{672}\times 9$ (7) ≡ 2 (7)

Exercice 4 : Soit l'équation (E) : $x^2 - x + 4 \equiv 0\ (6)$

1) Recopier puis remplir le tableau de congruence suivant :

$x \equiv (6)$	0	1	2	3	4	5
$x^2 \equiv (6)$	0	1	4	3	4	1
$-x+4 \equiv (6)$	4	3	2	1	0	5
$x^2-x+4 \equiv (6)$	4	4	0	4	4	0

2) Résoudre alors l'équation (E)

Les solutions de l'équation sont les entiers tels que $x \equiv 2\ (6)$ ou $x \equiv 5\ (6)$ donc de la forme $x = 2+6k$ ou $5+6k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 5 : Critère de divisibilité par 7

Cet exercice a pour objectif d'utiliser et de démontrer un critère de divisibilité par 7

1) Donner tous les nombres entiers naturels à un et deux chiffres divisibles par 7

0 , 7 , 14 , 21 , 28 , 35 , 42 , 49 , 56 , 63 , 70 , 77 , 84 , 91 , 98

2) Voici deux exemples mettant en jeu une même procédure permettant de déterminer si un nombre entier naturel est divisible par 7 ou non :

574 est-il divisible par 7 ?

$$\begin{array}{r|l} 57 & 4 \\ -8 & 4\times 2 \\ 49 & \end{array}$$

49 est divisible par 7
donc 574 aussi

827 est-il divisible par 7 ?

$$\begin{array}{r|l} 82 & 7 \\ -\ 14 & 7\times 2 \\ 68 & \end{array}$$

68 n'est pas divisible par 7
donc 827 non plus.

A l'aide de cette procédure, dire si les nombres 406 , 895 , 5607 sont divisibles par 7

406 → 40 6
-12 2×6
28
28 est divisible par 7
donc 406 aussi

895 → 89 5
-10 2×5
79
79 n'est pas divisible par 7
donc 895 aussi

5607 560 7
-14 2×7
546 54 6
-12 2×6
42
42 divisible par 7 donc 5607 aussi

3) Enoncer un critère simple de divisibilité par 7 lié à cette procédure

Soit n un entier de chiffre des unités a . On considère le nombre N formé par n sans son chiffre des unités

on calcule alors N – $2\times a$. Si le nombre obtenu est divisible par 7 alors n est divisible par 7

4) **<u>Démonstration :</u>** Soit n un entier naturel tel que : n = $10a+b$ avec a et b entier naturel

Démontrer l'équivalence : n ≡ 0 (7) ⇔ $a-2b$ ≡ 0 (7)

On procédera par double implication et on rappelle que -6 ≡ 1 (7)

n ≡ 0 (7) donc 10a + b ≡ 0 (7) donc 3a+b ≡ (0) 7 donc 6a+2b ≡ 0 (7) donc -a + 2b ≡ 0 (7)

Réciproquement

$a-2b$ ≡ 0 (7) donc $10a-20b$ ≡ 0 (7) donc 10a+b ≡ 0 (7) car -20 ≡ 1 (7)