Recherche

Exercice 1 :

```python
from numpy import *
def produit(x,y,z):
    A=array([[3,5,-1],[4,2,1],[-3,-1,7]])
    B=array([[x],[y],[z]])
    return dot(A,B)
```

Voilà le programme python que Henri a rentré dans sa console.
Il fait fonctionner sa fonction et obtient le résultat ci-dessous .

```
>>> produit(1,1,1)
array([[7],
       [7],
       [3]])
```

Quel calcul le programme de Henri a-t-il fait ?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 7 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{. Le programme calcule } A \times B = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 :

Soit $R = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$. Calculer R^{2013}

$R^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$ $\qquad R^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$

On a alors $R^4 = -I \times R = -R$

$R^5 = -R \times R = -R^2$

$R^6 = -R^2 \times R = -R^3 = I$

$R^7 = R$

On retrouve donc la matrice R donc les puissances de R sont périodique de période 6 .

$R^{2013} = R^{6\times 335+3} = (R^6)^{335} \times R^3 = I^{335} \times (-I)^3 = -I$

Exercice 3 :

Deux villes X et Y totalisent une population d'un million d'habitants. La ville X est plus agréable
mais la ville Y offre de meilleurs salaires. A l'année zéro, un quart des habitants sont en X. Chaque année 27 % des habitants de Y partent habiter dans la ville X pour avoir un meilleur cadre de vie et 13 % des habitants de X partent habiter dans la ville Y pour augmenter leur niveau de vie.
Déterminer le nombre d'habitants de la ville X à la 25ème année.

Si X_n et Y_n représentent la population des villes l'année n en millions d'habitants.

On a les relations suivantes : $X_0 = \frac{1}{4}$, $Y_0 = \frac{3}{4}$, $X_{n+1} = 0{,}87\, X_n + 0{,}27 \times Y_n$ et $Y_{n+1} = 0{,}13\, X_n + 0{,}73\, Y_n$

A l'aide des matrices, cela donne $\begin{pmatrix} X_{n+1} \\ Y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}87 & 0{,}27 \\ 0{,}13 & 0{,}73 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_n \\ y_n \end{pmatrix}$

$$U_{n+1} = M \times U_n$$

On a donc $U_{25} = M \times U_{24} = M \times M \times U_{23} = M^2 \times U_{23} = M^2 \times M \times U_{22} = M^3 \times U_{22} = \dots = M^{25} \times U_0$

Il ne reste donc plus qu'à calculer $U^{25} = \begin{pmatrix} 0{,}675 & 0{,}675 \\ 0{,}325 & 0{,}325 \end{pmatrix}$ d'où la calculatrice donne $U_{25} = \begin{pmatrix} 0{,}675 \\ 0{,}325 \end{pmatrix}$

La ville X est donc composée de 675 000 habitants après 25 ans de ce régime