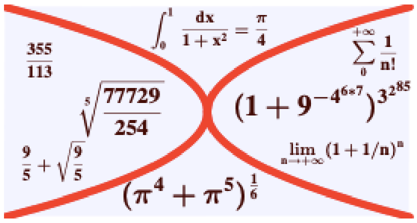

DM Terminale Math expert

Exercice 1 :

Soit P le polynôme défini sur C par : $P(z)=z^4+2z^3-z^2+2z+1$

1) Vérifier que 0 n'est pas une racine du polynôme P

P(0)=1 donc 0 n'est pas racine

2) Pour $z\neq 0$, on pose $u=z+\frac{1}{z}$

a) Exprimer u^2-3 en fonction de z

$$u^2-3=\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-3=z^2+2+\frac{1}{z^2}-3 \;=\; z^2+\frac{1}{z^2}-1$$

b) Calculer $\frac{P(z)}{z^2}$ pour z ≠ 0 et l'exprimer en fonction de u

$$\frac{P(z)}{z^2} = \frac{z^4+2z^3-z^2+2z+1}{z^2} = \frac{z^4}{z^2}+\frac{2z^3}{z^2}-\frac{z^2}{z^2}+\frac{2z}{z^2}+\frac{1}{z^2} = z^2+2z-1+\frac{2}{z}+\frac{1}{z^2}$$

$$= z^2+\frac{1}{z^2}-1+2\left(z+\frac{1}{z}\right) = u^2-3+2u$$

3) En déduire les racines dans C du polynôme P sous forme algébrique

On commence par résoudre $u^2+2u-3=0$

$\Delta=4+12=16>0$ deux racines réelles

$u_1=\frac{-2-4}{2}$ = -3 ou $u_2=\frac{-2+4}{2}$ = 1

Il faut donc pour conclure $z+\frac{1}{z}=-3$ et $z+\frac{1}{z}=1$

$z+\frac{1}{z}=-3$ $z^2+1=-3z$ $z^2+3z+1=0$ $\Delta=9-4=5>0$ donc deux racines réelles : $z_1=\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$ $z_2=\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$	$z+\frac{1}{z}=1$ $z^2+1=z$ $z^2-z+1=0$ $\Delta=1-4=-3<0$ donc deux racines complexes $z_3=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ $z_4=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$

Exercice 2 : Résoudre les équations suivantes :

a) $z^5+3z^3+z^2+3=0$ $z^3(z^2+3)+z^2+3=0$ $(z^2+3)(z^3+1)=0$	b) Soit P(z) = $z^3+(2-i)z^2+(1-2i)z-i=0$ -1 et i sont des racines évidentes donc on factorise P par $(z-(-1))(z-i)=z^2+(1-i)z-i$ $P(z)=(z^2+(1-i)z-i)(az+b)$

<table>
<tr>
<td>
$z^2+3=0$ ou $z^3+1=0$
$z^2=-3=3\mathrm{i}^2$ $z^3-(-1)^3=0$
$z=\pm\sqrt{3}\mathrm{i}$ $(z+1)(z^2-z+1)=0$
$z-1=0$ ou
$z^2+z+1=0$
$z=1$ $\Delta=-3$
$\Delta<0$ donc
deux solutions complexes
$z=\dfrac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$
donc 5 solutions : 1 ; $\pm\sqrt{3}\mathrm{i}$; $\dfrac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$
</td>
<td>
$\mathrm{P}(z)=az^3+(b+a(1-\mathrm{i}))z^2+(b(1-\mathrm{i})-a\mathrm{i})z-\mathrm{i}b$
Par identification , il vient :
$\begin{cases} a=1 \\ b+a(1-\mathrm{i})=2-\mathrm{i} \\ b(1-\mathrm{i})-a\mathrm{i}=1-2\mathrm{i} \\ -\mathrm{i}b=-\mathrm{i} \end{cases}$ cad $\begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$
$\mathrm{P}(z)=(z+1)(z-\mathrm{i})(z+1)$
Donc deux racines -1 et i
</td>
</tr>
</table>

c) P(z) = $5z^4+2z^3-3z^2-2z-2=0$

-1 et 1 sont des racines évidentes donc on factorise par $(z-1)(z+1)=z^2-1$

$$\mathrm{P}(z)=(z^2-1)(az^2+bz+c) = az^4-az^2+bz^3-bz+cz^2-c = az^4+bz^3+(-a+c)z^2-bz-c$$

$$\begin{cases} a=5 \\ b=2 \\ -a+c=-3 \\ -b=-2 \\ -c=-2 \end{cases} \quad \text{cad} \quad \begin{cases} a=5 \\ b=2 \\ c=2 \end{cases} \quad \text{d'où } \mathrm{P}(z)=(z-1)(z+1)(5z^2+2z+2)$$

$z=\pm 1$ ou $5z^2+2z+2=0$

$z=\pm 1$ ou $\Delta=4-40=-36$ <0 deux racines complexes

$$z=\frac{-2\pm 6\mathrm{i}}{10} = \frac{-1\pm 3\mathrm{i}}{5}$$

<u>Exercice 3 :</u> On raisonne par disjonction des cas

En raisonnant modulo 8, montrer que l'équation (E) : $17x^2-31y^2=22$, où x et y sont des entiers relatifs, n'a pas de solution.

17 ≡ 1 (8) et 31 ≡ -1(8) et 22 ≡ 6(8)

L'équation devient donc x^2+y^2 ≡ 6(8)

Reste de x dans la division par 8	0	1	2	3	4	5	6	7
Reste de x^2 dans la division par 8	0	1	4	1	0	1	4	1

Les restes d'un carré sont au nombres de trois donc on dresse maintenant un tableau dans lequel on place x^2+y^2 modulo 8 :

y^2 \ x^2	0	1	4
0	0	1	4
1	1	2	5
4	4	5	0

<u>Conséquence :</u> x^2+y^2 n'est jamais congru à 6 modulo 8 donc l'équation n'a pas de solutions