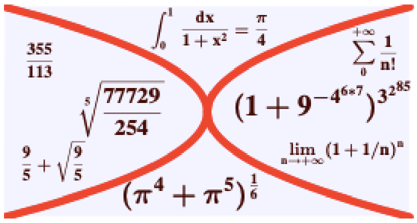
DM Math expertes



Exercice 1 : Les questions sont indépendantes

1) On considère l'équation à coefficients complexes :

$$(E): \quad 2z^2-(1+6i)z+3i=0$$

a) Démontrer que l'équation (E) admet un unique nombre imaginaire pur comme solution et le déterminer

Soit $z=bi$ avec $b\neq 0$. On a alors : $2(bi)^2-(1+6i)\times bi+3i = -2b^2-bi+6b+3i =$ $-2b^2+6b+i(-b+3)$

Pour être égal à zéro il faut donc avoir $\begin{cases}-2b^2+6b=0\\ -b+3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b(-2b+6)=0\\ b=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=0 \; ou b=3\\ b=3\end{cases}$

L'imaginaire pur $z=3i$ est donc solution de l'équation

b) L'équation (E) admet-elle comme solution un nombre réel ? Justifier

Soit z = a . On a alors : $2a^2-(1+6i)a+3i = 2a^2-a+i(-6a+3)$.

Pour être égal à zéro il faut donc avoir $\begin{cases}2a^2-a=0\\ -6a+3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a(2a-1)=0\\ a=\frac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=0 \; ou a=\frac{1}{2}\\ a=\frac{1}{2}\end{cases}$

d'où $z=\frac{1}{2}$ est solution de l'équation

2) Déterminer pour quelle valeur de x, le nombre complexe $(x-2i)^4$ est réel.

On développe avec le binôme de Newton le triangle de pascal donnant comme coefficient binomiaux dans l'ordre 1 4 6 4 1 :

$$(x-2i)^4=(x+(-2i))^4=x^4+4\times x^3\times(-2i)+6\times x^2\times(-2i)^2+4\times x\times(-2i)^3+(-2i)^4$$

$$= x^4-8x^3i-12x^2+32xi+16 = x^4-12x^2+16+i(-8x^3+32x)$$

Pour être réel, on doit donc avoir : $-8x^3+32x=0$ c'est à dire $x(-8x^2+32)=0$

x = 0 et $x^2=4$

x = 0 et x = ± 2

3) Résoudre l'équation $z^2+2\bar{z}+1=0$

$(x+iy)^2+2(x-iy)+1=0$

$x^2+2ixy-y^2+2x-2iy+1=0$

$x^2-y^2+2x+1+i(2xy-2y)=0$

$\begin{cases}x^2-y^2+2x+1=0\\ 2xy-2y=0\end{cases}$

L'équation $2xy-2y=0$ donne $y(2x-2)=0$ c'est à dire $y=0$ ou $x=2$

Pour y = 0 , l'équation $x^2-y^2+2x+1=0$ devient $x^2+2x+1=0$ soit $(x+1)^2=0$ et x = -1

Pour x = 1 , l'équation $x^2-y^2+2x+1=0$ devient $1-y^2+2+1=0$ soit $y^2=4$ d'où $y=\pm 2$

<u>**Conclusion :**</u> Les solutions sont donc $z=-1$, $z=1+2\mathrm{i}$ et $z=1-2\mathrm{i}$

<u>Exercice 2 :</u>

1) On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par : $\mathrm{P}(u)=u^4-1$

a) Factoriser le polynôme P dans $\mathbb{C}$ en produit de facteurs du premiers degré à coefficients complexes

$$\mathrm{P}(u)=(u^2-1)(u^2+1)=(u-1)(u+1)(u^2-i^2) = (u-1)(u+1)(u-\mathrm{i})(u+\mathrm{i})$$

b) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $\mathrm{P}(u)=0$

Quatre solutions : 1 ; -1 ; i et -i

2) On considère l'équation (E) : $\left(\frac{1-2z}{z-2}\right)^4=1$

Résoudre cette équation dans $\mathbb{C}$.

Valeur interdite z = 2

On pose $u=\frac{1-2z}{z-2}$ on obtient donc $u^4=1$ c'est à dire $u^4-1=0$ soit $\mathrm{P}(u)=0$

D'après la question précédente, on a donc quatre solutions : ±1 et ±i d'où on résout les quatre équations :

- $\frac{1-2z}{z-2}=1$ $\quad 1-2z=z-2$ $\quad z=1$
- $\frac{1-2z}{z-2}=-1$ $\quad 1-2z=-z+2$ $\quad z=-1$
- $\frac{1-2z}{z-2}=\mathrm{i}$ $\quad 1-2z=\mathrm{i}z-2\mathrm{i}$ $\quad (-2-\mathrm{i})z=-2\mathrm{i}-1$ d'où $z=\frac{-2\mathrm{i}-1}{-2-\mathrm{i}}$ = ... = $\frac{4}{5}+\frac{3}{5}\mathrm{i}$
- $\frac{1-2z}{z-2}=-\mathrm{i}$ $\quad 1-2z=-\mathrm{i}z+2\mathrm{i}$ $\quad (-2+\mathrm{i})z=2\mathrm{i}-1$ d'où $z=\frac{2\mathrm{i}-1}{-2+\mathrm{i}}$ = ... = $\frac{4}{5}-\frac{3}{5}\mathrm{i}$

<u>Exercice 3 :</u>

1) a) Déterminer le reste de la division euclidienne de 2021^{2021} par 9

2021 = $9\times 224+5$ donc 2021^{2021} $\equiv$ 5^{2021} (9)

On cherche alors les restes des puissances de 5 modulo 9 :

$5^1 \equiv 5(9)$

$5^2 \equiv 25(9) \equiv 7(9)$

$5^3 \equiv 35(9) \equiv 8(9) \equiv -1(9)$

on trouve -1 donc on peut s'arrêter là (ou continuer jusqu'à trouver 1 : $5^6 \equiv 1(9)$)

$2021=3\times673+2$ donc $5^{2021} \equiv (5^3)^{673}\times5^2\ (9)$

$5^{2021} \equiv (-1)^{673}\times5^2\ (9)$

$5^{2021} \equiv -25(9) \equiv 2(9)$

On obtient donc $2021^{2021} \equiv 2\ (9)$ le reste recherché est donc 2

b) On pose A = 2021^{2021}

Démontrer que A s'écrit en numération décimale avec au plus 8084 chiffres

$2021^{2021}<3000^{2021}$

or $3000^{2021}=3^{2021}\times1000^{2021} = 3^{2021}\times10^{6063}$

d'où $2021^{2021}<3^{2021}\times10^{6063}$

Or $3^{2021}<10^{2021}$ donc

$2021^{2021}<3^{2021}\times10^{6063}<10^{2021}\times10^{6063}$

$2021^{2021}<10^{8084}$

Or 10^{8084} s'écrit 1000...000 avec 8084 fois zéro d'où comme 2021^{2021} est strictement plus petit , il s'écrit avec au plus 8084 chiffres