DM 1

TS Spécialité mathématique

Exercice 1 :

On veut résoudre dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ l'équation 9x + 7y = 138

En justifiant la réponse, écrire une fonction en langage python qui permet de résoudre le problème , le faire tourner sur calculatrice ou ordinateur et donner les solutions de cette équation

On a $y=\frac{138-9x}{7}$ et on sait que $y \geq 0$ donc $\frac{138-9x}{7} \geq 0$ ce qui donne $x \leq \frac{138}{9}$ c'est à dire $x \leq 15{,}33$ donc x varie entre 0 et 15 d'où à l'aide d'une boucle Pour, on peut trouver les solutions de l'équation :

Variables : x,y : entiers

Traitement :
```
def equation() :
    for x in range(15) :
        y = (138-9x)/7
        if y - int(y) == 0 :      # remarque : c'est une façon de tester si on a un entier
            print(x)
            print(y)
```

L'ordinateur donne comme couple solution (6 ; 12) et (13 ; 3)

Exercice 2 :

1) Déterminer tous les entiers naturels x et y tels que $x^2y-xy^2=6$

$xy(x-y)=6$ d'où xy et $x-y$ sont des diviseurs associés de 6 avec xy positif car x et y le sont donc $x-y>0 \text{ et } x>y$

- $\begin{cases} xy=1 \\ x-y=6 \end{cases}$ ne convient pas car xy=1 donne comme seule solution x=1 et y=1 or x>y
- $\begin{cases} xy=6 \\ x-y=1 \end{cases}$ x et y sont des diviseurs associés de 6 donc $(x;y)=(6;1)$ ou $(x;y)=(3;2)$. La condition $x-y=1$ impose donc $(x;y)=(3;2)$
- $\begin{cases} xy=2 \\ x-y=3 \end{cases}$ x et y sont des diviseurs associés de 2 donc $(x;y)=(2;1)$ qui ne convient pas avec $x-y=3$
- $\begin{cases} xy=3 \\ x-y=2 \end{cases}$ s et y sont des diviseurs associés de 3 donc $(x;y)=(3;1)$ qui convient
- **Conclusion :** deux couples solutions : $(x;y)=(3;2)$ ou $(3;1)$

2) Soit n un entier naturel . On considère les entiers N = 9n+1 , M = 9n – 1 et P = $81n^2-1$

a) Déterminer la parité de M et N selon la parité de n

- n pair donc $n=2k$ donne $N=2\times9k+1$ et $M=2\times9k-1$ donc impair
- n impair donc n = 2k+1 donne $N=9(2k+1)+1=2\times(9k+5)$ et $M=2\times(9k+4)$

  donc M et N pairs

b) Démontrer que si n est pair alors $81n^2-1$ est impair

n pair ⇒ n = 2k donc $81n^2-1=81\times4k^2-1$ = $2K-1$ donc impair

c) Démontrer que $81n^2-1$ est divisible par 4 **si et seulement si** n est impair

- supposons $81n^2-1$ divisible par 4 alors $81n^2-1$ est pair d'où la contraposée de la propriété démontrée en b donne n impair
- réciproquement

  Supposons n impair alors n=2k+1 et $81n^2-1$ = $81(2k+1)^2-1$ = $324k^2+324k+81-1$ =

  $4\times81k^2+4\times81k+4\times20$ = 4K donc divisible par 4

3) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

a) Démontrer que $9^{n+1}-2^{n+1}=11(9^n-2^n)-18(9^{n-1}-2^{n-1})$

$11(9^n-2^n)-18(9^{n-1}-2^{n-1})$ = $11\times9^n-11\times2^n-18\times9^{n-1}+18\times2^{n-1}$ = $11\times9^n-11\times2^n-2\times9^n+9\times2^n$ = $9^n(11-2)-2^n(11-9)$ = $9^{n+1}-2^{n+1}$

b) Démontrer, par récurrence, que $3^{2n}-2^n$ est divisible par 7

__initialisation :__ n=0 $3^{2n}-2^n=1-1=0$ = 7×0 donc divisible par 7
SQ un entier n tel que $3^{2n}-2^n$ divisible par 7 et DQ $3^{2n+2}-2^{n+1}$ divisible par 7
Par hypothèse, $3^{2n}-2^n=7K$ donc $3^{2n}=7K+2^n$
$3^{2n+2}-2^{n+1}$ = $3^{2n}\times3^2-2^{n+1}$ = $(7K+2^n)\times9-2^n\times2$ = $63K+2^n(9-2)$ = $7(9K+2^n)$ = 7k donc divisible par 7
On termine alors la récurrence