Matrices

I- Généralités

Définition : Une matrice A de taille $n\times p$ est un tableau à deux dimensions de nombres (a_{ij}) où i est la ligne et j la colonne, avec $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$

Par exemple, voici comment est notée et indexée une matrice 3×5 :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{pmatrix}$$

Vocabulaire

- S'il n'y a qu'une seule ligne alors la matrice est **une matrice ligne**
- S'il n'y a qu'une seule colonne alors la matrice est **une matrice colonne**
- Si le nombre de ligne est égal au nombre de colonne alors M est **une matrice carrée**
- Une matrice **diagonale** est une matrice carré dont tous les coefficients a_{ij} sont nuls dès que $i \neq j$

Exemple :

$\begin{pmatrix} 4 & 2{,}2 & 5 \end{pmatrix}$ est une matrice ligne de taille 3

$\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 7{,}3 \end{pmatrix}$ est une matrice colonne de taille 3

$\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 4{,}7 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée de taille 2

$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale

Définition: Deux matrices sont égales si et seulement si elles ont même taille et si leurs coefficients respectifs sont égaux

II- Opérations algébriques

II- 1 . Somme

Définition La *somme* de deux matrices de même taille $n\times p$ est la matrice de taille $n\times p$ formée naturellement comme somme terme à terme

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 10 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

Propriétés : Soient A , B et C trois matrices de même taille.

- $A+B=B+A$ (commutativité)
- $A+O=O+A=A$ (élément neutre) où O est la matrice nulle
- $A+(B+C)=(A+B)+C$ (associativité)

II-2 Multiplication par un réel

Définition : La multiplication d'une matrice par un scalaire est la matrice de même taille formée naturellement comme multiplication de tous ses coefficients.

$$3\times\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 15 & 3 \\ -3 & 12 & 15 \end{pmatrix}$$

Propriété : Soient A et B deux matrices de même taille. Soient λ et μ deux scalaires.

- $\lambda(A+B) = \lambda A+\lambda B$
- $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$
- $\lambda(\mu A)=(\lambda\mu)A$

II-3 Produit de matrices

Définition : Le produit d'une matrice A de taille $\boldsymbol{n}\times p$ par une matrice B de taille $p\times\boldsymbol{q}$ est la matrice C de taille $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{q}$ définie par $C_{ij} = \sum_{k=1}^{p} A_{ik}B_{kj}$ c'est à dire le produit de **la ligne i** de A par la **colonne j** de B

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+8-2 & -1+4-6 \\ 3+8+1 & -3+4+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}$$

Propriétés : Soient A , B et C trois matrices de dimensions compatibles.

- $C(A+B)=CA+CB$ (distributivité à gauche)
- $(A+B)C=AC+BC$ (distributivité à droite)

Remarques

- La commutativité n'est, **en général**, pas respectée $AB \neq BA$

  Avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

  $A\times B =$

  et $B\times A =$

- Le théorème du produit nul n'est pas vérifié . $\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (0)$ et pourtant aucun des deux facteurs n'est nul

III- Matrices carrées

III-1 Matrice identité

Définition *La matrice identité* de taille n est la matrice carrée de taille n définie par :

$I_{ij} = 1$ si i = j et $I_{ij} = 0$ si $i \neq j$ c'est à dire : $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Propriété : Si A est une matrice carrée de taille n alors $I_n A = A I_n = A$

On dit que la matrice I_n est **l'élément neutre** de la multiplication

III-2 Inverse d'une matrice

Définition Deux matrices carrées A et B de même dimension $n \times n$ sont *inverses* si $AB = BA = I_n$

Dans ce cas, on dit que A est **inversible** et son **inverse** est B notée A^{-1}

Propriété (admise) : Soit A et B deux matrices carrées d'ordre n

$$AB = I_n \Leftrightarrow BA = I_n$$

Remarques

- Une conséquence de la propriété précédente :
  Pour prouver que B est l'inverse de A, vérifier $AB = I_n$ ou $BA = I_n$ suffit
- S'il existe, l'inverse du produit MN est : $(MN)^{-1} = N^{-1}M^{-1}$

Exemple :

- Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & -0,5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 & -0,5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ on a $A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$ donc les matrices A et B sont inverses l'une de l'autre
- Toutes les matrices ne sont pas inversibles par exemple $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible. Supposons que A soit inversible alors il existe une matrice $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tel que $A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. D'où

  $\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et comme deux matrices égales ont les mêmes coefficients, on aurait alors a+c=1 et a+c=0 ce qui est impossible

Cas particulier de l'inverse d'une matrice 2x2

Soit A = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée de taille 2

On appelle déterminant de A notée det(A) le nombre $det(\mathrm{A})=ad-bc$

La matrice A est alors inversible si et seulement si det(A) ≠ 0 et on a alors $\mathrm{A}^{-1}=\dfrac{1}{det(\mathrm{A})}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Démonstration :

Soit B = $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. On a alors : $\mathrm{A}\times\mathrm{B} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \mathrm{A}\times\mathrm{C}=0\neq\mathrm{I}_2 = (ad-bc)\mathrm{I}_2$

- Si det(A) = ad–bc ≠ 0 on a alors $\mathrm{A}\times\left(\dfrac{1}{det(\mathrm{A})}\mathrm{B}\right)=\mathrm{I}_2$ donc A est inversible d'inverse $\dfrac{1}{det(\mathrm{A})}\mathrm{B}$
- Si $det(\mathrm{A})=ad-bc=0$, on a alors $\mathrm{A}\times\mathrm{B}=0$ donc A n'est pas inversible. En effet si A était inversible d'inverse une matrice C, on aurait alors $\mathrm{C}\times\mathrm{A}\times\mathrm{B}=\mathrm{I}_2\times\mathrm{B}=\mathrm{B}$ et $\mathrm{C}\times\mathrm{A}\times\mathrm{B}=\mathrm{C}\times 0=0$ et donc B = 0 ce qui donnerait a=b=c=d=0 d'où A = 0 et $\mathrm{A}\times\mathrm{C}=0\neq\mathrm{I}_2$ ce qui contredit C inverse de A

Dans la pratique, comment calculer l'inverse de A = $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$

- **On utilise la propriété :**

  det(A) = $4\times 2-6\times 1$ = 2 ≠ 0 donc A est inversible et on a : $\mathrm{A}^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -0{,}5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$
- **On utilise la méthode de coefficients indéterminés** : On note C = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la matrice inverse de A si elle existe d'où on a : $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix} 4a+c & 4b+d \\ 6a+2\mathrm{c} & 6b+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et par identification :

  $\begin{cases} 4a+c=1 \\ 6a+2\mathrm{c}=0 \\ 4b+d=0 \\ 6b+2d=1 \end{cases}$ ce qui donne $\begin{cases} -2a=-2 & \mathrm{L}_2-2\mathrm{L}_1 \\ -2b=1 & \mathrm{L}_4-2\mathrm{L}_3 \end{cases}$ d'où a = 1 , $b=-\dfrac{1}{2}$ et en réinjectant dans L_1 et L_3 on obtient $c=-3$ et $d=2$ d'où C = $\begin{pmatrix} 1 & -0{,}5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$
- **On utilise la calculatrice** dès que la taille est supérieure à 2 . Il suffit de rentrer la matrice A puis on entre Mat A^{-1} sur casio et C^{-1} sur TI

IV- Systèmes linéaires

Le système linéaire à n variables $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=y_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=y_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=y_n \end{cases}$ peut se traduire matriciellement par AX=Y où :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad , \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Résoudre ce système linéaire AX = Y consiste alors à trouver X en fonction de Y c'est à dire inverser A pour pouvoir écrire $X = A^{-1}Y$

Propriété : Si un système linéaire a pour écriture matricielle AX = B où A est une matrice carrée inversible d'ordre n et B une matrice colonne à n lignes alors ce système possède une unique solution donnée par $X = A^{-1}B$

Remarque : La contraposée de cette propriété permet d'établir qu'une matrice n'est pas inversible :
Si un système linéaire ne possède pas de solution ou plusieurs solutions alors la matrice associée n'est pas inversible

On veut résoudre le système $\begin{cases} 4x+y=2 \\ 6x+2y=-1 \end{cases}$

1) On commence par donner l'écriture matricielle du système :

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

c'est à dire A X = B avec $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

2) On cherche alors l'inverse de A si elle existe

$\det(A) = 4\times2-6\times1 = 2 \neq 0$ donc A est inversible et on a : $A^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -0{,}5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

3) On détermine alors X à l'aide de A^{-1} :

A X = B donc $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & -0{,}5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ -8 \end{pmatrix}$

Le couple (x ; y) = (2,5 ; –8) est donc l'unique couple solution du système