n°40 p85

1) On calcule $P(i)$ et on trouve 0 donc i racine de P

2) On peut donc factoriser P par $z-i$ :

$$P(z)=(z-i)(az^2+bz+c) = az^3+(-ia+b)z^2+(-ib+c)z-ic = z^3-(1+i)z^2+z-1-i$$

Par identification, il vient :

$$\begin{cases} a=1 \\ -ia+b=-1-i \\ -ib+c=1 \\ -ic=-1-i \end{cases} \text{ ssi } \begin{cases} a=1 \\ b=-1-i+i \\ -ib=1-c \\ c=\dfrac{-1-i}{-i} \end{cases} \text{ ssi } \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=1-i \end{cases} \text{ d'où } P(z)=(z-i)(z^2-z+1-i)$$

n°42 p86

1) $P(-i)=0$ donc $-i$ est une racine de P

2) On peut donc factoriser par z+i : $P(z)=(z+i)(az^2+bz+c) = az^3+(ia+b)z^2+(ib+c)z+ic$

$$= z^3+(-6+i)z^2+(13-6i)z+13i$$

Par identification , il vient : $\begin{cases} a=1 \\ ia+b=-6+i \\ ib+c=13-6i \\ ic=13i \end{cases}$ ssi $\begin{cases} a=1 \\ b=-6+i-i \\ ib=13-6i+13 \\ c=13 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} a=1 \\ b=-6 \\ c=13 \end{cases}$ d'où

$$P(z)=(z+i)(z^2-6z+13)$$

Pour les racines , on a -i et on résout ensuite $z^2-6z+13=0$

$\Delta=36-4\times13=-16<0$ donc deux racines complexes

$$z_1=\frac{6-4i}{2}=3-2i \quad \text{et} \quad z_2=\overline{z_1}=3+2i$$

**n°47 p85**

1) $\overline{P(z)} = \overline{z^4-5z^3+7z^2-5z+6} = \overline{z^4}-5\overline{z^3}+7\overline{z^2}-5\overline{z}+6 = \overline{z}^4-5\overline{z}^3+7\overline{z}^2-5\overline{z}+6 = P(\overline{z})$

2) On calcule P(i) et on trouve 0 d'où $P(i)=0$ . On a alors $P(\bar{i}) = \overline{P(i)} = 0$ d'où $-i$ est aussi une racine de P

3) On peut donc factoriser P par $z-i$ et $z+i$ c'est à dire

$$P(z)=(z-i)(z+i)(az^2+bz+c)=(z^2+1)(az^2+bz+c) = az^4+bz^3+(a+c)z^2+bz+c =$$
$$z^4-5z^3+7z^2-5z+6$$

Par identification, il vient $\begin{cases} a=1 \\ b=-5 \\ a+c=7 \\ c=6 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} a=1 \\ b=-5 \\ c=6 \end{cases}$ on a donc $P(z)=(z-i)(z+i)(z^2-5z+6)$

n°54 p85

1) On montre que $\pm\sqrt{3}i$ sont des racines du polynômes d'où la factorisation :

$$P(z)=(z-i\sqrt{3})(z+i\sqrt{3})(az^2+bz+c) = (z^2+3)(az^2+bz+c) = az^4+bz^3+(3a+c)z^2+3bz+3c$$
$$= 2z^4+z^3+9z^2+3z+9$$

par identification, il vient : $\begin{cases} a=2 \\ b=1 \\ 3a+c=9 \\ 3b=3 \\ 3c=9 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} a=2 \\ b=1 \\ c=3 \end{cases}$ d'où $Q(z)=2z^2+z+3$

2) $2z^2+z+3=0$

$\Delta=1-24=-23<0$ donc deux racines complexes : $z_1=\frac{-1-i\sqrt{23}}{4}$ et $z_2=\frac{-1+i\sqrt{23}}{4}$

Il y a donc quatre racines : $z_1, z_2, \pm\sqrt{3}i$

Formule de Viete : n°78 p90