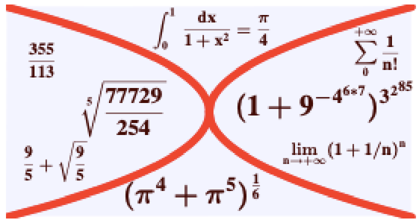
Factorisation d'un polynôme



Partie A

On souhaite démontrer la propriété suivante :

> soit a un nombre complexe et n un entier naturel. Pour tout nombre complexe z,
> $$z^n-a^n=(z-a)(z^{n-1}+az^{n-2}+a^2z^{n-3}+\ldots+a^{n-2}z+a^{n-1})$$

1) Démontrer que $q^n-1=(q-1)(q^{n-1}+q^{n-2}+\ldots+1)$

- $1+q^2+q^3+\ldots+q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{q^n-1}{q-1}$ d'où pour q≠1, on obtient
  $q^n-1=(q-1)(q^{n-1}+\ldots+q+1)$
- Pour q = 1 , l'égalité est encore vérifiée d'où la réponse

2) Démontrer la propriété dans le cas où a = 0

a=0 donc $z^n-a^n=z^n$ et $(z-a)(z^{n-1}+az^{n-2}+\ldots+1)=z\times z^{n-1}=z^n$ donc l'égalité est vérifiée

3) Dans le cas où a ≠ 0, appliquer l'égalité de la question 1 pour q = $\frac{z}{a}$ et conclure

$q^n-1=(q-1)(q^{n-1}+\ldots+q+1)$ devient $\left(\frac{z}{a}\right)^n-1=\left(\frac{z}{a}-1\right)\left(\left(\frac{z}{a}\right)^{n-1}+\left(\frac{z}{a}\right)^{n-2}+\ldots+\frac{z}{a}+1\right)$

$$\frac{z^n}{a^n}-1=\left(\frac{z-a}{a}\right)\left(\frac{z^{n-1}}{a^{n-1}}+\frac{z^{n-2}}{a^{n-2}}+\ldots+\frac{z}{a}+1\right)$$

On multiplie alors par a^n et on obtient :

$$z^n-a^n=a^n\left(\frac{z-a}{a}\right)\left(\frac{z^{n-1}}{a^{n-1}}+\ldots+\frac{z}{a}+1\right)$$

$$z^n-a^n=a\times\left(\frac{z-a}{a}\right)\times a^{n-1}\left(\frac{z^{n-1}}{a^{n-1}}+\frac{z^{n-2}}{a^{n-2}}+\ldots+\frac{z}{a}+1\right)$$

$$z^n-a^n=(z-a)(z^{n-1}+az^{n-2}+\ldots+a^{n-2}z+a^{n-1})$$

En conclusion , l'expression z^n-a^n peut se factoriser par $z-a$ pour tout complexe a

4) **Application :** Déterminer les racines du polynôme P(z) = z^3-1

$z^3-1=z^3-1^3$ on peut donc factoriser par $z-1$: $z^3-1^3=(z-1)(z^2+z+1)$

Partie B

1) Soit P un polynôme de degré n. Traduire cette affirmation en donnant la forme de P(z)

$$P(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \ldots + c_1 z^1 + c_0 \text{ avec } c_i \in \mathbb{C} .$$

2) En déduire une expression de P(a) puis de P(z) – P(a)

On a donc $P(a) = c_n a^n + c_{n-1} a^{n-1} + \ldots + c_1 a + c_0$ d'où

$$\begin{aligned} P(z) - P(a) &= (c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \ldots + c_1 z + c_0) - (c_n a^n + c_{n-1} a^{n-1} + \ldots + c_1 a + c_0) \\ &= c_n (z^n - a^n) + c_{n-1} (z^{n-1} - a^{n-1}) + \ldots + c_1 (z-a) \end{aligned}$$

3) Utiliser alors la partie A pour factoriser $P(z) - P(a)$

En observant la forme de la question précédente, on peut d'après la partie A factoriser les $z^k - a^k$ par $z-a$ pour tout k ∈ [1;n] c'est à dire : $z^k - a^k = (z-a) Q_k$ où Q est un polynôme de degré $k-1$

on a donc : $P(z) - P(a) = c_n (z-a) Q_n + c_{n-1} (z-a) Q_{n-1} + \ldots + c_1 (z-a)$

$$P(z) - P(a) = (z-a)(c_n Q_n + c_{n-1} Q_{n-1} + \ldots + c_1)$$

4) On sait que a est une racine de P. Que peut-on en déduire pour le polynôme P ?

a est une racine de P donc $P(a) = 0$ d'où d'après la question précédente :

$$P(z) = (z-a)(c_n Q_n + c_{n-1} Q_{n-1} + \ldots + c_1) = (z-a) Q(z)$$

Ainsi, si un polynôme admet une racine, on peut le factoriser par $z-a$

Partie C

Soit $P(z) = z^3 - 4z^2 + 6z - 4$

1) Déterminer une racine réelle de P .

$z = 2 \quad P(2) = 8 - 16 + 12 - 4 = 0$ donc 2 est une racine de P

2) En déduire les solutions de l'équation P(z)=0

2 étant une racine de P on peut factoriser P par $z-2$:

$z^3 - 4z^2 + 6z - 4 = (z-2)(az^2 + bz + c) = az^3 + (-2a+b) z^2 + (-2b+c) z - 2c$

On identifie les coefficients et on trouve :

$$\begin{cases} a = 1 \\ -2a + b = -4 \\ -2b + c = 6 \\ -2c = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 2 \end{cases}$$

On a donc $P(z) = (z-2)(z^2 - 2z + 2)$

Ainsi P(z)=0 ⇔ $z - 2 = 0$ ou $z^2 - 2z + 2 = 0$

z = 2 $\qquad \Delta = 4 - 8 = -4 < 0$ donc deux solutions dans C

$$z_1 = \frac{2-2i}{2} = 1 - i \text{ et } z_2 = \overline{z_1} = 1 + i$$