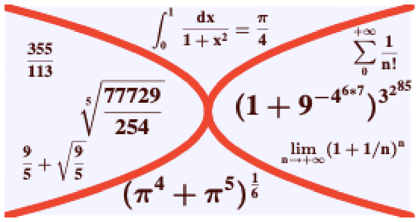

n°89 p24

1) $\frac{z-i}{z+1}=4i$ équation définie pour z ≠ -1

$z-i=4i(z+1)$

$z-i=4iz+4i$

$z(1-4i)=5i$

$z=\frac{5i}{1-4i} = \frac{5i(1+4i)}{(1-4i)(1+4i)} = \frac{5i-20}{17}$ ≠ -1 donc S = { $\frac{-20+5i}{17}$ }

2) $\frac{z-2}{z+i}=\frac{z-2i}{z+1}$ équation définie pour z ≠ -1 et z ≠ -i

$(z-2)(z+1)=(z-2i)(z+i)$

$z^2+z-2z-2=z^2+iz-2iz+2$

$-z-2=-iz+2$

$(-1+i)z=4$

$z=\frac{4}{-1+i} = \frac{4(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)} = \frac{-4-4i}{2} = -2-2i$

3) $-\frac{z}{iz+1}+\frac{3z}{z-i}=3+i$ équation définie pour $iz+1\neq0$ et $z-i\neq0$ c'est à dire $z\neq-\frac{1}{i}$ = i

$\frac{-z(z-i)+3z(iz+1)}{(iz+1)(z-i)}=3+i$

$\frac{-z^2+iz+3iz^2+3z}{iz^2+z+z-i}=3+i$

$(-1+3i)z^2+z(3+i)=(3+i)(iz^2+2z-i)$

$(-1+3i)z^2+z(3+i)=(3i-1)z^2+(6+2i)z-3i+1$

$z(3+i)-(6+2i)z=1-3i$

$z(-3-i)=1-3i$

$z=\frac{1-3i}{-3-i}$

z=...

z= i

n°97 p25

$(4-2i)z-\frac{1+i}{1-i}=2\sqrt{3}+1+i(1-\sqrt{3})$

$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+2i-1}{2}$ = i d'où l'équation :

$(4-2i)z-i=2\sqrt{3}+1+i(1-\sqrt{3})$

$(4-2i)z=2\sqrt{3}+1+i(2-\sqrt{3})$

$z = \dfrac{2\sqrt{3}+1+i(2-\sqrt{3})}{4-2i} = \ldots = \dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$

a= $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et b = $\dfrac{1}{2}$

2) $z_0^2 = \left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^2 = \dfrac{3+2\sqrt{3}i-1}{4} = \dfrac{2+2\sqrt{3}i}{4} = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$

$z_0^3 = z_0^2 \times z_0 = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\dfrac{\sqrt{3}+i}{2} = \dfrac{\sqrt{3}+i+3i-\sqrt{3}}{4} = i$

3) $z_0^{12} = (z_0^3)^4 = i^4 = 1$ et $z_0^{2016} = (z_0^3)^{672} = i^{672} = (i^2)^{336} = (-1)^{336} = 1$

<u>n°70 p 22</u>

1) $z+2i\bar{z}=1-i$

La présence de z et $\bar{z}$ entraîne le retour à la forme algébrique $z=x+iy$ avec $\bar{z}=x-iy$

$x+iy+2i(x-iy)=1-i$

$x+iy+2ix+2y=1-i$

$x+2y+i(y+2x)=1-i$

Deux complexes égaux ont même partie réelle et imaginaire donc

$\begin{cases} x+2y=1 \\ y+2x=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+4y=2 \\ y+2x=-1 \end{cases}$ par soustraction il vient $(2x+4y)-(y+2x)=2-(-1)$

ce qui donne $3y=3$ d'où y = 1

$x+2y=1$ devient donc $x+2=1$ cad $x=-1$

La solution de l'équation est donc z = $-1+i$

2) $z\bar{z}=2z+3$

$(x+iy)(x-iy)=2(x+iy)+3$

$x^2+y^2=2x+3+2iy$

on obtient donc $\begin{cases} x^2+y^2=2x+3 \\ 0=2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x-3=0 \\ y=0 \end{cases}$

$x^2-2x-3=0$ $\Delta = 4+12=16 > 0$ donc deux racines $x_0=-1$ et $x_1=3$ donc deux solutions à l'équation : $z=-1$ et $z=3$

3) $z^2+z\bar{z}=2$

$x^2+2ixy-y^2+x^2+y^2=2$

$2x^2+2ixy=2$

$x^2+ixy=1$

$\begin{cases} x^2=1 \\ xy=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 1 \\ \pm y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 1 \\ y=0 \end{cases}$

L'équation a donc pour solution $z=\pm 1$

4) $\overline{z}+\mathrm{i}\,z=0$

$x-\mathrm{i}\,y+\mathrm{i}(x+\mathrm{i}\,y)=0$

$x-\mathrm{i}\,y+\mathrm{i}\,x-y=0$

$x-y+\mathrm{i}(x-y)=0$

$\begin{cases}x-y=0\\x-y=0\end{cases} \Leftrightarrow \quad x-y=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=y$

L'équation admet donc pour solution tous les complexes de la forme $z=x+\mathrm{i}\,x \;=\; x(1+\mathrm{i})$

5) $z\,\overline{z}=1$

$(x+\mathrm{i}\,y)(x-\mathrm{i}\,y)=1$

$x^2+y^2=1$

Un lointain souvenir : les solutions sont les coordonnées de tous les points situés sur le cercle de centre $\mathrm{O}(0;0)$ et de rayon 1

<u>n°84 p24</u>

1) $\mathrm{i}\,z-2\,\overline{z}=-\mathrm{i}$

$\mathrm{i}(x+\mathrm{i}\,y)-2(x-\mathrm{i}\,y)=-\mathrm{i}$

$\mathrm{i}\,x-y-2\,x+2\,\mathrm{i}\,y=-\mathrm{i}$

$-2\,x-y+\mathrm{i}(x+2\,y)=-\mathrm{i}$

$\begin{cases}-2\,x-y=0\\x+2\,y=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-2\,x-y=0\\2\,x+4\,y=-2\end{cases}$

par addition il vient : $-2\,x-y+2\,x+4\,y=0-2$

$3\,y=-2$

$y=-\dfrac{2}{3}$

on a alors $x=-1-2\,y=-1+\dfrac{4}{3}=\dfrac{1}{3}$

ce qui donne $z=\dfrac{1}{3}-\dfrac{2}{3}\mathrm{i}$

2) $(\overline{z}+4\mathrm{i}+2)(z+2\mathrm{i})=0$

produit de facteur nul donc $\overline{z}+4\mathrm{i}+2=0$ ou $z=-2\,\mathrm{i}$

c'est à dire $\overline{z}=-2-4\mathrm{i}$ ou $z=-2\,\mathrm{i}$

$z=-2+4\mathrm{i} \qquad z=-2\,\mathrm{i}$

3) $\dfrac{z+\mathrm{i}}{\overline{z}-2-2\,\mathrm{i}}=\dfrac{2-\mathrm{i}}{3}$

$3(z+\mathrm{i})=(2-\mathrm{i})(\overline{z}-2-2\,\mathrm{i})$

$3\,z+3\mathrm{i}=2\,\overline{z}-4-4\mathrm{i}-\mathrm{i}\,\overline{z}+2\,\mathrm{i}-2$

$3(x+\mathrm{i}\,y)+3\,\mathrm{i}=2(x-\mathrm{i}\,y)-6-2\mathrm{i}-\mathrm{i}(x-\mathrm{i}\,y)$

$3\,x+\mathrm{i}(3\,y+3)=2\,x-6-y+\mathrm{i}(-2\,y-2-x)$

$$\begin{cases} 3x=2x-6-y \\ 3y+3=-2y-2-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-6 \\ x+5y=-5 \end{cases}$$

par soustraction il vient $x+y-x-5y=-6+5$

$$-4y=-1$$

$$y=\frac{1}{4}$$

On a alors $x=-6-y=-6-\frac{1}{4}=\frac{-25}{4}$ on obtient donc z = $-\frac{25}{4}+\frac{i}{4}$

<u>n°98 p25</u>

1) z' est défini pour $z\overline{z}+1\neq 0$

$$(x+iy)(x-iy)+1\neq 0$$

$$x^2+y^2\neq -1$$

or quel que soit x et y $x^2+y^2\geq 0$ donc impossible d'avoir $x^2+y^2=-1$ donc aucune valeur interdite et z' est défini pour tout nombre complexe z

2) a) z' réel $\Leftrightarrow z'=\overline{z'} \Leftrightarrow \frac{z^2-2i}{z\overline{z}+1}=\frac{\overline{z}^2+2i}{\overline{z}z+1} \Leftrightarrow z^2-2i=\overline{z}^2+2i \Leftrightarrow z^2-\overline{z}^2=4i \Leftrightarrow (z-\overline{z})(z+\overline{z})=4i$

b) $z-\overline{z}=2iy$ et $z+\overline{z}=2x$ donc $(z-\overline{z})(z+\overline{z})=4i$ devient $2iy\times 2x=4i$ donc $xy=1$ cad $y=\frac{1}{x}$

d'où $z=x+iy=x+\frac{i}{x}$

3) z' imaginaire pur $\Leftrightarrow$ $z'=-\overline{z'}$ $\Leftrightarrow$ $\frac{z^2-2i}{z\overline{z}+1}=-\frac{\overline{z}^2+2i}{\overline{z}z+1}$ $\Leftrightarrow$ $z^2=-\overline{z}^2$ $\Leftrightarrow$ $z^2+\overline{z^2}=0$ $\Leftrightarrow$

$(x+iy)^2+(x-iy)^2=0$ $\Leftrightarrow$ $2x^2-2y^2=0$ $\Leftrightarrow$ $y^2=x^2$ $\Leftrightarrow$ $y=\pm x$ c'est à dire $z=x+ix$ ou $z=x-ix$