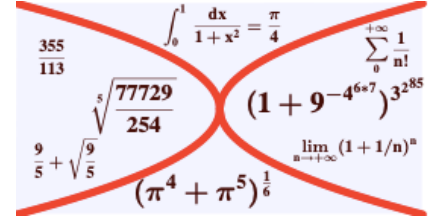


Factorisation d'un polynôme



Partie A

On souhaite démontrer la propriété suivante :

soit a un nombre complexe et n un entier naturel. Pour tout nombre complexe z ,

$$z^n - a^n = (z - a)(z^{n-1} + az^{n-2} + a^2z^{n-3} + \dots + a^{n-2}z + a^{n-1})$$

- 1) Démontrer que $q^n - 1 = (q - 1)(q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + 1)$
- 2) Démontrer la propriété dans le cas où $a = 0$
- 3) Dans le cas où $a \neq 0$, appliquer l'égalité de la question 1 pour $q = \frac{z}{a}$ et conclure
- 4) **Application :** Déterminer les racines du polynôme $P(z) = z^3 - 1$

Partie B

- 1) Soit P un polynôme de degré n . Traduire cette affirmation en donnant la forme de $P(z)$
- 2) En déduire une expression de $P(a)$ puis de $P(z) - P(a)$
- 3) Utiliser alors la partie A pour factoriser $P(z) - P(a)$
- 4) On sait que a est une racine de P . Que peut-on en déduire pour le polynôme P ?

Partie C

Soit $P(z) = z^3 - 4z^2 + 6z - 4$

- 1) Déterminer une racine réelle de P .
- 2) En déduire les solutions de l'équation $P(z) = 0$