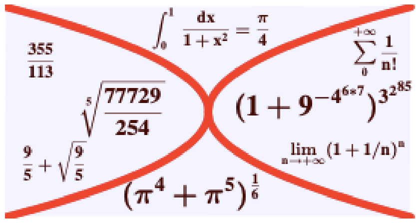
# Factorisation d'un polynôme



## Partie A

On souhaite démontrer la propriété suivante :

> soit a un nombre complexe et n un entier naturel. Pour tout nombre complexe z,
> $$z^n - a^n = (z-a)(z^{n-1} + az^{n-2} + a^2 z^{n-3} + \ldots + a^{n-2} z + a^{n-1})$$

1) Démontrer que $q^n - 1 = (q-1)(q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots + 1)$

2) Démontrer la propriété dans le cas où a = 0

3) Dans le cas où a ≠ 0, appliquer l'égalité de la question 1 pour q = $\frac{z}{a}$ et conclure

4) **Application :** Déterminer les racines du polynôme P(z) = $z^3 - 1$

## Partie B

1) Soit P un polynôme de degré n. Traduire cette affirmation en donnant la forme de P(z)

2) En déduire une expression de P(a) puis de P(z) – P(a)

3) Utiliser alors la partie A pour factoriser $P(z) - P(a)$

4) On sait que a est une racine de P. Que peut-on en déduire pour le polynôme P ?

## Partie C

Soit $P(z) = z^3 - 4z^2 + 6z - 4$

1) Déterminer une racine réelle de P .

2) En déduire les solutions de l'équation P(z)=0