Les nombres complexes Saison III

I- Forme exponentielle d'un nombre complexe

Définition :
Pour tout réel , on note $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$

- $e^{i\theta}$ **désigne donc le nombre complexe de module 1 et d'argument** θ **.**

  En effet , $|e^{i\theta}| = \sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta} = \sqrt{1} = 1$

- La forme trigonométrique d'un nombre complexe étant z = $|z|(\cos(\theta)+i\sin(\theta))$

  on a alors une nouvelle forme pour un nombre complexe :

La **forme exponentielle** d'un nombre complexe z non nul est : z = $|z|e^{i\theta}$

premières valeurs : $e^{i0} =$ $e^{i\frac{\pi}{2}} =$ $e^{i\pi} =$

Le conjugué de $e^{i\theta}$ est :

Une simple transcription des propriétés vues sur les arguments donne alors :

Théorème: pour tout θ et θ' , on a :

$e^{i\theta}\times e^{i\theta'} =$ $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} =$ $(e^{i\theta})^n =$

A noter que la notation exponentielle rend les calculs très simples :

Si Z = $3e^{i\frac{\pi}{4}}$ et Z' = $7e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ alors ZZ' =

n°17 , 19 , 20 , 21 p65

II- Formule de Moivre et d'Euler

Formule d'Euler :
Pour tout réel θ , on a : $\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

Démonstration : Il suffit d'écrire le système suivant : $\begin{cases} e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta \\ e^{-i\theta}=\cos\theta-i\sin\theta \end{cases}$ puis par addition on obtient les formules précédentes

Formule de Moivre
Pour tout réel θ , on a : $(\cos\theta+i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

Démonstration on utilise une propriété des exponentielles : $(e^{i\theta})^n = e^{ni\theta}$

Application :

Soit f la fonction définie par $f(x)=\cos(2x)\times\sin(3x)$. On souhaite déterminer une primitive de cette fonction. Pour cela , on commence par « linéariser » f(x) :

$$f(x) = \frac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{2}\times\frac{e^{3ix}-e^{-3ix}}{2} = \text{on développe} = \frac{e^{5ix}-e^{-5ix}}{4i} + \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{4i} = \frac{\sin(5x)}{2} + \frac{\sin(x)}{2}$$

On a alors pour primitive : $F(x)=\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{5}\right)\cos(5x) + \frac{1}{2}(-\cos x) = -\frac{\cos(5x)}{10}-\frac{\cos x}{2}$

III- Ensemble des complexes de module 1

a) L'ensemble $\mathbb{U}$

Théorème

Soit $\mathbb{U}$, l'ensemble des complexes de module 1.

- $z \in \mathbb{U}$ si et seulement si $z = e^{i\theta} = \cos(\theta)+i\sin(\theta)$
- L'ensemble $\mathbb{U}$ est stable par rapport au produit et à l'inverse :

$$z\,,z' \in \mathbb{U} \Rightarrow z\times z' \in \mathbb{U} \text{ et } \frac{1}{z} \in \mathbb{U}$$

-

Démonstration : Facile

b) Les racines n-ième de l'unité

Théorème

- Les **racines n-ième de l'unité** sont les complexes z solutions de l'équation $z^n=1$
- L'ensemble $\mathbb{U}_n$ des n racines de l'unité est : $\mathbb{U}_n = \{ z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}, k \in [0;n-1] \}$
- Pour n ≥ 2, leur somme est nulle : $\sum_{k=0}^{n-1} z_k = 1+z_1+z_2+\ldots+z_{n-1} = 0$
- Leurs images M_k dans le plan complexe sont les sommets d'un polygone régulier de n côtés inscrit dans le cercle unité

Démonstration : voir activité

Exemples : $\mathbb{U}_2 = \{1, e^{i\pi}\} = \{1,-1\}$,

$\mathbb{U}_3 = \left\{1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{4\pi}{3}}\right\}$, on pose $j = e^{\frac{2\pi}{3}}$ d'où $\mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\}$,

$\mathbb{U}_4 = \left\{1, e^{i\frac{\pi}{2}}, e^{i\pi}, e^{i\frac{3\pi}{2}}\right\} = \{1, i, -1; -i\}$

On obtient les représentations suivantes :