

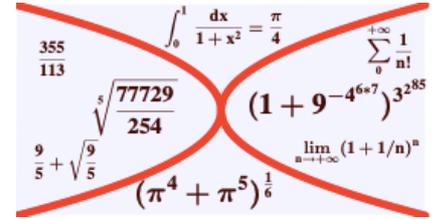
Détecter des nombres premiers

On s'intéresse à la répartition des nombres premiers dans l'ensemble des entiers naturels . Sont-ils rares ou nombreux ? Ont-ils tendance à devenir de plus en plus rares ?

A- Une fonction qui détecte les nombres premiers

1) Expliquer les différentes étapes de la fonction python ci-dessous :

```
from math import sqrt
def premier(n) :
    a=1
    for i in range ( 2 , int(sqrt(n)+1)) :
        q = n / i
        if q == int (q) :
            a = 0
    return a
```



- 2) A l'aide de cette fonction, déterminer si les nombres 1423 , 14273 et 49919 sont premiers
- 3) En utilisant la fonction précédente, écrire une fonction qui affiche la liste des nombres premiers inférieurs ou égal à un entier n.
- On prendra soin d'inclure un compteur pour donner le nombre de nombres premiers de la liste

B - Répartition des nombres premiers

1) Deux nombres premiers sont dits jumeaux s'ils diffèrent de 2 . Etablir la liste des nombres premiers jumeaux inférieurs à 100

2) a) Les dizaines riches.

A partir de 10, les nombres premiers se terminent par 1 , 3 , 7 , 9 : Voici une dizaine riche où les quatre possibles sont premiers : 11 , 13 , 17 , 19 .

Combien y a-t-il de dizaines riches inférieurs à 200 ?

b) Et les dizaines pauvres

Existe-t-il des dizaines inférieurs à 300 sans nombre premier ?

3) Une propriété : il existe des intervalles aussi grands que l'on veut ne contenant aucun nombre premier .

Démontrer cette propriété en démontrant que pour $n \geq 3$, l'intervalle $[n!+2; n!+n]$ ne contient aucun nombre premier.

4) **Les nombres de Mersenne**

Marin Mersenne dans les années 1600 s'est intéressé aux nombres premiers de la forme $2^n - 1$. Il prouva que pour être premier , il faut que n soit lui même premier : $2^n - 1 \in \mathcal{P} \Rightarrow n \in \mathcal{P}$.

\mathcal{P} représentant l'ensemble des nombres premiers

a) Ecrire la contraposée de cette propriété.

b) En se rappelant que $x^n - 1 = (x-1)(\dots)$, démontrer alors cette contraposée.

c) La réciproque est-elle vraie ?