

L'objectif de cette activité est de répondre à la question suivante :

Question : Trouver tous les nombres premiers p tel que $A = 2^p + p^2$ soit lui même premier

- 1) Définir un nombre premier
- 2) Utiliser le tableau suivant afin d'obtenir les nombres premiers inférieurs à 100 .

On parle du crible d'Eratosthène

| | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|-----|----|-----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 178 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 |
| 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 |
| 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 |
| 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 |

- 3) Retour à la question
 - a) Compléter le tableau suivant :

| | | | | | | | | | |
|---|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| P | | | | | | | | | |
| A | | | | | | | | | |

Emettre une conjecture sur A dès que $p \geq 5$

- b) En remarquant que $2 \equiv -1 \pmod{3}$, établir que $A \equiv -1 + p^2 \pmod{3}$
 - c) En raisonnant alors par disjonction de cas sur les restes de p modulo 3, démontrer votre conjecture .
- 4) a) Test de primalité : Ecrire un algorithme de reconnaissance d'un nombre premier
 - b) **Pour aller plus loin**
Démontrer que si p est un nombre premier alors il s'écrit $6k+1$ ou $6k-1$
 - c) En déduire une amélioration de votre algorithme en expliquant pourquoi il y a amélioration