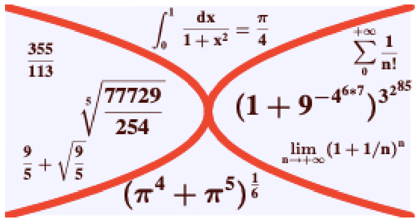


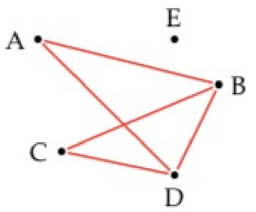
GRAPHES

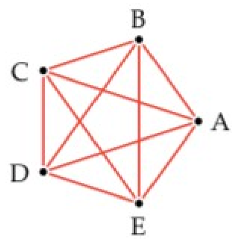
I- Définitions

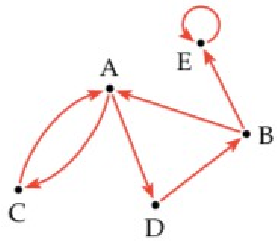
Eléments d'un graphe

- Un **graphe d'ordre n** est un ensemble de **n** points, appelés sommets reliés par des arêtes
- Dans un graphe non orienté, les arêtes reliant deux sommets se schématisent par un trait et dans un graphe orienté par une flèche appelée arc .
  Un arc qui relie un sommet à lui-même est appelé boucle.
- Deux sommets sont dits **adjacents** s'ils sont reliés par une arête ou un arc
- Le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes ou d'arcs dont ce sommet est une extrémité (une boucle comptant pour 2)
- Un graphe est **complet** si tous les sommets sont adjacents entre eux .
- Un graphe est dit **simple** si au plus une arête relie deux sommets et s'il n'y a pas de boucle sur un sommet

Exemples :







Nature	Graphe 1 d'ordre 5 non orienté	Graphe 2 d'ordre 5 non orienté	Graphe 3 d'ordre 5 orienté
Degré des sommets	A: 2, B: 3, C: 2, D: 3, E: 0	Graphe complet Sommets de degré 4	A: 4, B: 3, C: 2, D: 2, E: 3

Théorème

Dans un graphe, la somme des degrés de chaque sommet est égale au double du nombre d'arêtes .

En conséquence, dans un graphe simple non orienté, le nombre de sommets de degré impair est pair
En effet, s'il existait un **nombre impair** de **sommets de degré impair**, la somme de tous les **degrés** des **sommets** serait un **nombre impair**. Cela **est** impossible puisque cette somme **est** le double du **nombre** d'arêtes dans le graphe, et donc un **nombre pair**.

II- Parcourir un graphe

- Une chaîne est une liste de sommets telle que chaque sommet de la liste soit adjacent au suivant . La longueur de la chaîne est alors le nombre d'arêtes qui la compose
- Un graphe est dit connexe s'il existe une chaîne entre deux sommets quelconques de ce graphe
- Une chaîne fermée est une chaîne dont l'origine et l'extrémité sont confondues
- Une chaîne fermée composée d'arêtes toutes distinctes forme un cycle .

Remarques : Dans un graphe orienté, on parle de chemin pour une chaîne et de circuit pour un cycle

Graphe 1 : A-B-D-C-B chaîne de longueur 4 D-A-B-C-D est un cycle de longueur 4

Graphe 2 : A-D-B-E chemin de longueur 3 B-A-C-A-D-B circuit de longueur 5

Chaine Eulérienne

- Une chaîne eulérienne est une chaine qui contient chaque arête du graphe une et une seule fois . Un cycle eulérien est une chaîne eulérienne fermée
- Théorème (admis)

  Dans le cas d'un graphe non orienté, un graphe connexe admet une chaîne eulérienne si et seulement si le nombre de sommets de degré impair vaut 0 ou 2 .

En conséquence, un graphe connexe non orienté admet un cycle eulérien si et seulement si tous ses sommets sont de degré pair . Si le graphe connexe a deux sommets de degré impair, ce sont les extrémités de la chaine eulérienne .

Un graphe possédant plus de deux sommets de degré impair ne possède pas de chaine eulérienne

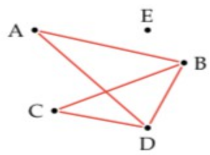
III- Matrice d'adjacence

Définition

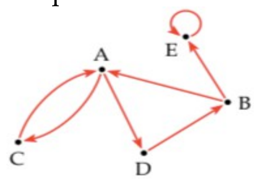
A tout graphe d'ordre n, on peut associer une matrice carrée M = (a_{ij}) d'ordre n telle que a_{ij} est le nombre d'arêtes reliant le sommet i au sommet j . Cette matrice est appelée matrice d'adjacence du graphe G.

A noter que la matrice d'adjacence d'un graphe non orienté est symétrique .

Exemples :



$$M_1 = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$



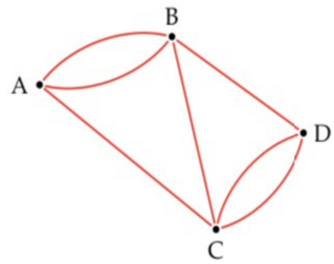
$$M_2 = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Propriété admise : Nombre de chemins de longueur p

Soit un graphe d'ordre n et M sa matrice d'adjacence .

Le nombre de chemins de longueur p reliant deux sommets i et j est donné par le terme de la i-ème ligne et de la j-ième colonne de la matrice M^p notée $m_{ij}^{(p)}$

Exemple :



Les arêtes du graphe ci-contre représentent des pistes de ski de fond mesurant chacune 2 km. Les sommets de ce graphe sont les différents points d'accès à ce domaine skiable.

1) Déterminer la matrice d'adjacence de ce graphe

2) Déterminer le nombre de parcours :

   a) de 4 km reliant B à C

   b) de 6 km reliant C à lui-même

   c) d'au plus 6 km reliant A à D

1) $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ et la calculatrice donne $M^2 = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ et $M^3 = \begin{pmatrix} 4 & 16 & 14 & 5 \\ 16 & 8 & 11 & 14 \\ 14 & 11 & 8 & 16 \\ 5 & 14 & 16 & 4 \end{pmatrix}$

2) 4 km revient à dire chemin de longueur 2 donc d'après M^2 , entre B et C il y en a 4

3) 6 km revient à dire chemin de longueur 3 donc d'après M^3 , entre C et C il y en a 8

4) Pour un parcours d'au plus 6 km, on descend donc 1 ou 2 ou 3 pistes

En regardant M , M^2 et M^3, il vient 0 + 4 + 5 = 9 donc 9 parcours entre A et D d'au plus 6 km