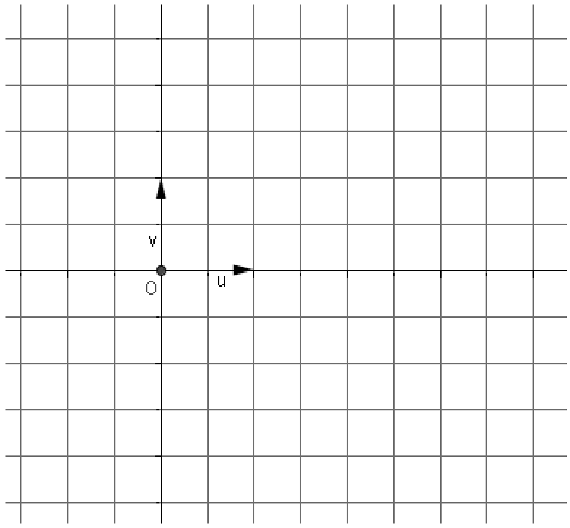
NOMBRES COMPLEXES

I- Représentation géométrique d'un nombre complexe

Munissons le plan d'un repère orthonormé (O $,\vec{u},\vec{v}$)

Principe : A tout nombre complexe Z = x + iy avec x et y réels, on associe le point M de coordonnées (x ; y)

$Z_1 = 2 + \mathbf{i}$
$Z_2 = 3 - 2\mathbf{i}$



Vocabulaire :

- Le point $M(x;y)$ s'appelle **l'image** du nombre complexe Z = x + **iy**
- Le nombre complexe Z = x + **iy** s'appelle **l'affixe** du point M(x ; y) (affixe : nom féminin)

  On note Z = affixe(M) ou Z = aff(M)

Affixe d'un vecteur, du milieu d'un segment .

Soit A et B deux points du plan complexe admettant pour affixes respectives Z_A et Z_B .

- * **L'affixe du vecteur $\vec{AB}$ est $Z_B - Z_A$**
- * **L'affixe du milieu I du segment [AB] est : $Z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$**

Démonstration :

- Notons $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$. On a alors : $Z_A = x_A + \mathbf{i}y_A$ et $Z_B = x_B + \mathbf{i}y_B$.
  Nous savons que les coordonnées du vecteur $\vec{AB}$ sont $(x_B - x_A ; y_B - y_A)$
  Or $Z_B - Z_A = x_B + \mathbf{i}y_B - (x_A + \mathbf{i}y_A) = (x_B - x_A) + \mathbf{i}\,(y_B - y_A)$ donc l'affixe du vecteur $\vec{AB}$ est $Z_B - Z_A$.

- Milieu d'un segment

  Le milieu de [AB] a pour coordonnées I $\left(\frac{x_A + x_B}{2};\frac{y_A + y_B}{2}\right)$. L'affixe de I est donc $z_I = \frac{x_A + x_B}{2} + \mathrm{i}\,\frac{y_A + y_B}{2}$

ce qui peut s'écrire $z_I = \frac{x_A + \mathrm{i}\,y_A + x_B + \mathrm{i}\,y_B}{2}$ = $\frac{z_A + z_B}{2}$

Ces interprétations géométriques des nombres complexes permettent de traduire des problèmes de géométrie en relations entre nombres complexes. Ainsi, on adaptera les règles vues avec des coordonnées aux affixes :

- Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont même affixe
- **L'affixe d'une somme de deux vecteurs est la somme des affixes de ces vecteurs**

II- Module d'un nombre complexe

a) Définition

Définition On appelle **module** d'un nombre complexe Z = x + iy la quantité positive $|Z|=\sqrt{x^2+y^2}$

Exemple : Module de 3 – 2i =

Interprétation géométrique

- Soit M un point d'affixe Z = x + iy . Le module de Z correspond à la distance OM
- Soit A et B d'affixes respectives z_A et z_B . La distance AB est donnée par : AB = $|z_B - z_A|$

Démonstration

La distance AB est $\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$ or $z_B - z_A = x_B + i\,y_B - x_A - i\,y_A = x_B - x_A + i(y_B - y_A)$ d'où

$|z_B - z_A| = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$ = AB

b) Propriété

Théorème : Propriété des modules

Pour tout nombre complexe Z et Z', on a :

1) $|Z|^2 = Z\overline{Z}$ 2) $|-Z|=|Z|$ 3) $|\overline{Z}|=|Z|$

4) $|Z\times Z'|=|Z|\times|Z'|$. En particulier, si k est un réel, $|k\times Z|=|k|\times|Z|$

5) Pour tout Z ≠ 0, $\left|\frac{Z}{Z'}\right|=\frac{|Z|}{|Z'|}$ 6) Inégalité triangulaire : $|Z+Z'| \leq |Z|+|Z'|$

7) Pour n ∈ ℕ, $|Z^n|=|Z|^n$

c) Ensemble U des complexes de module 1

L'ensemble des nombres complexes de module 1 est noté U.

Cet ensemble est stable par produit et passage à l'inverse ce qui signifie que :

si (z,z') ∈ U alors $z\times z'$ ∈ U et pour z ≠0 , 1/Z ∈ U

III- Arguments d'un nombre complexe

a) Définition

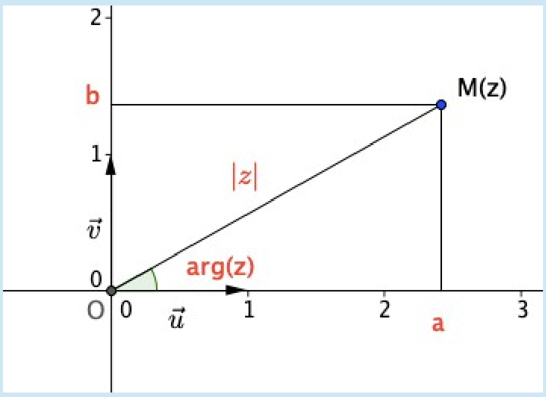
Définition: On appelle **argument** d'un nombre complexe Z non nul, toute mesure en radians de l'angle ($\vec{u}$; $\overrightarrow{OM}$)

On note ($\vec{u}$; $\overrightarrow{OM}$) = Arg (Z)

Un point M du plan peut alors être repéré de deux manières :

* par son affixe z = a + i b

* par ses coordonnées polaires (|z| ; arg(z))



Remarque sur l'argument Un nombre complexe admet une infinité d'argument.

Si θ est un argument de Z, tout autre argument de Z est de la forme θ + 2 kπ (k ∈ ℤ).

L'argument principal est celui qui appartient à $]-\pi;\pi]$

b) Calcul d'un argument

Définition

Soit z un nombre complexe non nul de forme algébrique $z = x + \mathrm{i}\, y$

L'argument de z noté θ est parfaitement défini par la donnée de son cosinus et son sinus : $\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{x}{|z|} \\ \sin(\theta) = \dfrac{y}{|z|} \end{cases}$

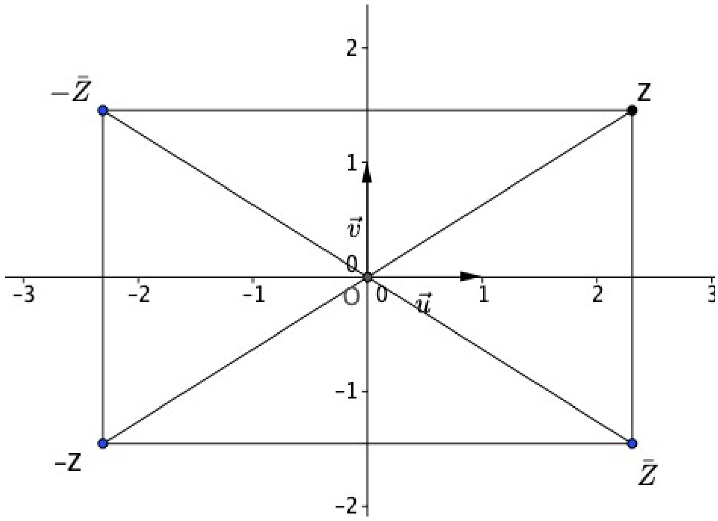
Déterminer la forme trigonométrique de z = $1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}$

$|1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}| = \sqrt{1^2+\sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$.

On a donc : $\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{x}{|z|} = \dfrac{1}{2} \\ \sin(\theta) = \dfrac{y}{|z|} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ donc l'argument de z est : $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ (on utilise le cercle trigo si nécessaire)

c) Propriété des arguments

Utiliser le schéma ci-contre pour compléter les égalités :



Propriétés : Soit z un nombre complexe

$\arg(\bar{z}) =$ $\arg(-z) =$

$\arg(-\bar{z}) =$

si z ∈ ℝ , arg(z) =

si z ∈ iℝ , arg(z) =

En vous inspirant des propriétés du logarithme, compléter les égalités suivantes :

Opération sur les arguments Soit z et z' deux complexes non nuls

$\arg(zz') =$ $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) =$

$\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) =$ pour tout n ∈ ℤ , $\arg(z^n) =$

d) Forme trigonométrique

Propriété Soit z = x + iy un nombre complexe d'argument θ . On a alors x = $|z|$ cos θ et b = $|z|$ sin θ

Le nombre complexe Z peut donc s'écrire :

Z = x + iy = $|z|$ (cos θ + **i** sin θ) Cette dernière écriture s'appelle la **forme trigonométrique** de Z