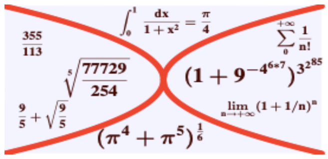


Un nouveau théorème

Exercice 1:

1) Un élève doit résoudre l'équation $3(x-2)=10(y+5)$ où x et y sont des entiers. Il écrit :

> **Comme $3(x-2)=10(y+5)$ on peut dire que 3 divise $10(y+5)$.**
> **Or 3 ne divise pas 10 donc 3 divise $y+5$ d'où $y+5=3k$ avec $k\in\mathbb{Z}$.**

Le professeur lui dit que son raisonnement est incorrect et lui précise qu'il est facile de donner des contre-exemples. Où est donc l'erreur de l'élève ? Et sauriez-vous donner un contre-exemple ?

2) L'objectif de cette question est de démontrer le **théorème de Gauss** qui est à compléter

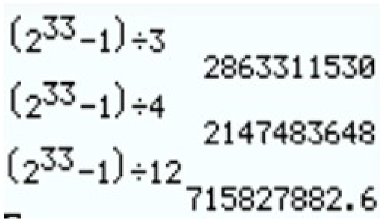
> Soient a, b et c trois entiers non nuls.
> Si a divise le produit .... et si .... et .... sont premiers entre eux, alors ..... divise......

a) Rappeler le théorème de Bézout.

b) Montrer qu'il existe deux entiers u et v tels que acu+bcv=c.

c) En déduire que a divise c.

Exercice 2 :



Un autre élève utilise sa calculatrice et obtient les résultats ci-contre :

Au vu des résultats, il affirme que 3 et 4 divise $2^{33}-1$.

Cependant, la calculatrice semble affirmer que 12 ne divise pas $2^{33}-1$.

1) En quoi cette affirmation est-elle contradictoire ?

2) Justifier que, en réalité, 4 ne divise pas $2^{33}-1$

3) Montrer que 3 ne divise pas $2^{33}-1$

4) Votre calculatrice a donc faux . Pourquoi ?

5) L'objectif de cette question est de démontrer un corollaire du théorème de Gauss dont voici un énoncé à compléter

> Soient a, b et n trois entiers non nuls.
> Si a et b divisent .... et si a et b sont .... entre eux,
> alors .... divise ....

c1) Montrer qu'il existe deux entiers k et k' que : $ka = k'b$

c2) Montrer que a divise k'

c3) En déduire que ab divise n.