1) On considère le théorème suivant appelé **Identité de Bezout**

> **Identité de Bezout**
> a et b désignent deux entiers relatifs non nuls.
> Si d = PGCD(a;b) alors il existe des entiers relatifs u et v tels que **au + bv = d**

Appliquer ce théorème aux PGCD calculés lors de l'activité précédente :

Pour rappel : $PGCD(12;48)=12$

$PGCD(1472;1196)=92$

$PGCD(441;777)=21$

$PGCD(2004;9185)=167$

$PGCD(-144;426)=6$

2) En utilisant l'identité de Bezout , démontrer alors ce théorème :

> **<u>Conséquence 1</u>** L'ensemble des diviseurs de deux entiers a et b est l'ensemble des diviseurs de leur PGCD

3) Compléter la démonstration suivante et en déduire un énoncé du **théorème de Bezout** :

- Si a et b sont ...., $PGCD(a;b)$ = ... et l'identité de Bezout permet de dire qu'il existe deux entiers relatifs u et v tels que au + bv = ...

- Réciproquement, s'il existe des entiers relatifs u et v tels que au + bv = ... , tout .... commun à a et b divise .... et bv donc divise .... c'est à dire .... donc PGCD(a;b) est un entier positif qui divise 1 d'où PGCD(a;b) = 1 et a et b sont premiers entre eux.

Application : Les inverses modulo n

On dit que a admet un inverse modulo n s'il existe un entier b tel que ab $ab \equiv 1(n)$

a) Démontrer que a admet un inverse modulo n si et seulement si a et n sont premiers entre eux

b) 7 admet-il un inverse modulo 22 ? Dans l'affirmative en donner un .

c) Résoudre $7x \equiv 5(22)$