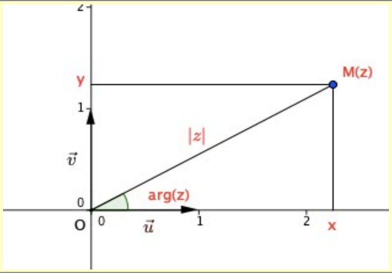
# Nombres Complexes : Module et argument

## I) Les définitions

Soit z = $x+iy$ un complexe non nul donné **sous forme algébrique.**

- Le **module** de z est le nombre de $\mathbb{R}^+$ définie par $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$
- **L'argument** de z est l'angle $\theta$ définie par :

$$\theta = (\vec{u}\,;\ \overrightarrow{OM}) = \arg(z)\ (2\pi)$$




**Interprétation du module** Soit M le point d'affixe z.

- Le module de z correspond à la distance OM
- Plus généralement, Si $M'$ a pour affixe $z'$, la distance $MM'$ est donnée par : $MM' = |z'-z|$

**Calcul de l'argument**

Soit z un nombre complexe non nul de forme algébrique $z=x+iy$

**L'argument** de z noté $\theta$ est parfaitement défini par la donnée de son cosinus et son sinus :

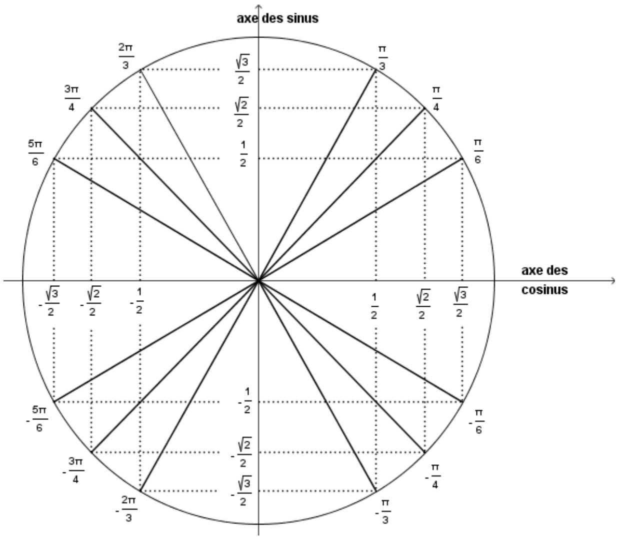
$$\begin{cases} \cos(\theta)=\dfrac{x}{|z|} \\ \sin(\theta)=\dfrac{y}{|z|} \end{cases}$$

**Utilisation:** Déterminer la forme trigonométrique de 2 – 2i

1. On commence par calculer le module : $|z| = \sqrt{2^2+(-2)^2} = \sqrt{8}$
2. On poursuit par le calcul de l'argument :

$$\begin{cases} \cos(\theta)=\dfrac{2}{\sqrt{8}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta)=\dfrac{-2}{\sqrt{8}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

On en déduit alors que $\theta = -\frac{\pi}{4}\ (2\pi)$




On a donc comme forme trigonométrique :

$$z = \sqrt{8}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

**On peut alors écrire z sous forme trigonométrique :** $z = |z|\ (\cos\theta + i\sin\theta)$

## II- Propriétés des modules et arguments

### a) Une première propriété à connaître

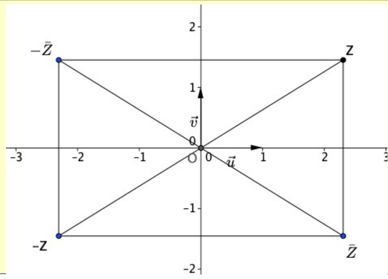
Pour tout nombre complexe z , $z \times \bar{z} = |z|^2$

**Démonstration :** je vous la laisse elle est facile

### b) Relations de symétrie

Pour tout nombre complexe z non nul, on a les relations suivantes :

- $|-z| = |z|$ et $arg(-z) = -arg(z) + \pi$
- $|\bar{z}| = |z|$ et $arg(\bar{z}) = -arg(z)$
- $|-\bar{z}| = |z|$ et $arg(-\bar{z}) = \pi - arg(z)$




### c) Quelques relations trigonométriques

**Propriété** Soit $\theta$ et $\theta'$ deux réels .

**Formules d'addition**

- $\cos(\theta + \theta') = \cos\theta \cos\theta' - \sin\theta \sin\theta'$
- $\cos(\theta - \theta') = \cos\theta \cos\theta' + \sin\theta \sin\theta'$
- $\sin(\theta + \theta') = \sin\theta \cos\theta' + \cos\theta \sin\theta'$
- $\sin(\theta - \theta') = \sin\theta \cos\theta' - \cos\theta \sin\theta'$

**Formule de duplication**

- $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$
  $= 2\cos^2\theta - 1$
  $= 1 - 2\sin^2\theta$
- $\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$

Des formules qui permettent de déterminer des valeurs exactes de sinus ou cosinus :

- $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$
- $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(2\times\frac{\pi}{8}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) - 1$ on en déduit que $\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+1}{2} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+1}{2} = \frac{\sqrt{2}+2}{4}$

  on a donc $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+2}{4}}$

### d) Opération sur modules et arguments

Pour tous nombres complexes z et z' non nuls, on a les relations suivantes :

$|z \times z'| = |z| \times |z'|$ et $arg(z \times z') = arg(z) + arg(z')$

$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ et $arg\left(\frac{z}{z'}\right) = arg(z) - arg(z')$

$|z^n| = |z|^n$ et $arg(z^n) = n \times arg(z)$

**Démonstrations :** Soit z et z' deux nombres complexes écrits sous forme trigonométrique :

$$z = |z|(\cos(\theta)+i\sin(\theta)) \quad \text{et } z' = |z'|(\cos(\theta')+i\sin(\theta'))$$

Les démonstrations de ces propriétés s'effectuent pour la plupart en effectuant les opérations ( produit ou quotient ) puis en utilisant les formules d'addition vu précédemment

**Remarque :** On peut retenir que les règles des arguments correspondent aux règles du logarithme népérien
Il est à noter que le module d'une somme n'est en général pas égal à la somme des modules .
On parle alors d'**inégalité triangulaire :** $|z+z'| \leq |z|+|z'|$

## III- Complexe et géométrie

On se place dans un repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$

### a) Angle orienté

**Théorème**

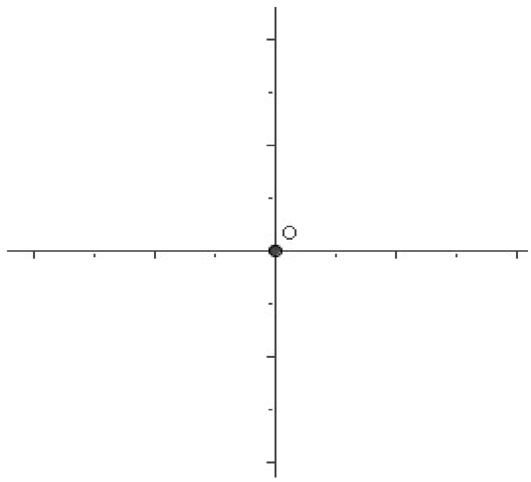
1. Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan. Pour tout point A et B du plan , on a $(\vec{u};\overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A)$
2. Pour tout point A, B ,C et D tels que A ≠ B et C ≠ D, on a : $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$

**Démonstration :**

1) On construit le point E tel que $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{AB}$ . L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ étant $z_B - z_A$ , le vecteur $\overrightarrow{OE}$ a pour affixe lui aussi $z_B - z_A$ d'où ( $\vec{u}$ ; $\overrightarrow{AB}$ ) =

2) On utilise la relation de Chasles pour les angles orientés :

( $\overrightarrow{AB}$ ; $\overrightarrow{CD}$ ) =



### b) Alignement , parallélisme , orthogonalité

**Alignement de trois points :**

A, B, C alignés ⇔ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ colinéaires ⇔ $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$ .

**Parallélisme de deux droites :**

(AB) et (CD) parallèles ⇔ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ colinéaires ⇔ $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$ .

**Orthogonalité de deux droites :**

(AB) perpendiculaire à (CD) ⇔ $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}) = \frac{\pi}{2}\ (\pi)$ ⇔ $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}$

**Démonstration :**

Il suffit de traduire en angle les relations de colinéarité :

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ colinéaires si et seulement si $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = 0\ (\pi)$ .

On applique ensuite la règle précédente.