Nombres complexes : Application à la géométrie

Exercice 1 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$)

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : (E_1) : $\dfrac{z-2}{z-1} = z$

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : (E_2) : $\dfrac{z-2}{z-1} = i$

3) Soit M , A et B les points d'affixes respectives : z , 1 et 2 . On suppose M distinct de A et B

   a) Interpréter géométriquement le module et un argument de $\dfrac{z-2}{z-1}$

   b) Retrouver géométriquement la solution de l'équation (E_2)

4) a) Montrer, à l'aide d'une interprétation géométrique, que toute solution complexe de l'équation $\left(\dfrac{z-2}{z-1}\right)^n = i$ où $n \in \mathbb{N}^*$, a pour partie réelle $\dfrac{3}{2}$

   b) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_3) $\left(\dfrac{z-2}{z-1}\right)^2 = i$.

Exercice 2 :

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-2z+5 = 0$

2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$)

   On considère les points A , B , C et D d'affixes respectives :

$$z_A = 1+2i \ , \ z_B = \overline{z_A} \ , \ z_C = 1+\sqrt{3}+i \quad \text{et} \quad z_D = \overline{z_C}$$

   a) Placer A et B dans le repère

   b) Calculer $\dfrac{z_B-z_C}{z_A-z_C}$ et donner le résultat sous forme algébrique

   c) En déduire la nature du triangle AbC

3) Démontrer que les points A , B , C , D appartiennent à un même cercle dont on précisera centre et rayon

4) Construire alors précisément les points C et D

Exercice 3:

Dans le plan complexe, on considère les points B, C, D, E définissant le carré de sens direct BCDE d'affixes respectives : $b = 1-i$, $c = -1-i$, $d = -1-3i$, $e = 1-3i$

1) Calculer $|b|$, $|c|$, $|d|$ et $|e|$

2) Soit Γ le cercle de centre O passant par B. Déterminer une équation de ce cercle

3) On considère Q un point de Γ distinct de B et C . L'affixe de Q est notée q = x+iy (avec x et y réels)

   Soit F et G les points du plan tels que QBFG soit un carré de sens direct c'est à dire $(\overrightarrow{QB};\overrightarrow{QG}) = +\dfrac{\pi}{2}$. On pose $Z = \dfrac{g-q}{b-q}$ où g est l'affixe du point G

   Interpréter géométriquement le module et un argument de Z. En déduire Z .

4) Prouver que $g = (1+x+y)+i(1-x+y)$. En déduire $|g|$ en fonction de x et y

5) En utilisant la question 2) exprimer $|g|$ en fonction de y

6) A l'aide de considérations géométriques, prouver que $|f| = |g|$ f étant l'affixe de F

7) Pour quelles valeurs de x et de y , les points E, D, G, F sont-ils sur un cercle de centre O ?
Préciser le rayon de ce cercle et en déduire la nature du triangle QBC.

Exercice 4 :

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$, avec la technique du discriminant, l'équation

$$z^2-(2+i(m-\sqrt{3}))z+1+m\sqrt{3}+i(m-\sqrt{3}) = 0 \text{ (E) où m est un réel.}$$

2) Dans le plan complexe, on désigne par M et M' les points dont les affixes z' et z" sont les solutions de l'équation (E) .

a) Déterminer m pour que le triangle OM'M" soit rectangle en O

b) Déterminer m pour que la distance M'M" soit égal à un réel positif ou nul donné