Les congruences

1) Déterminer le reste dans la division euclidienne par 11 de 608 et 487.
2) En déduire sans calculatrice que 608 – 487 est divisible par 11 .
3) a) Plus généralement, démontrer que si deux entiers a et b ont même reste dans la division euclidienne par n alors a – b est divisible par n

   b) Etudier la réciproque

Vocabulaire : a et b ont le même reste dans la division par n s'écrit $a \equiv b\ (n)$ et se lit a est congru à b modulo n

On a donc l'équivalence suivante : $a \equiv b\ (n) \Leftrightarrow a-b \equiv 0\ (n)$

4) Montrer que 9^{22} et 9^{20} ont le même chiffre des unités c'est à dire le même reste dans la division par 10
5) Démontrer alors les règles suivantes :
   - Si r est le reste de la division de a par n alors $a \equiv r\ (n)$
   - Compatibilité avec l'addition : Si $a \equiv b\ (n)$ et $c \equiv d\ (n)$ alors $a+c \equiv b+d\ (n)$
   - Compatibilité avec la multiplication : Si $a \equiv b(n)$ et $c \equiv d\ (n)$ alors $a\times c \equiv b\times d\ (n)$
   - Compatibilité avec les puissances : Si $a \equiv b\ (n)$ alors pour tout entier naturel k, $a^k \equiv b^k\ (n)$

Application :

1) Trouver les restes de la division euclidienne par 11 des nombres : 12^{15} , 10^7 , 78^{15} , 13^{12} , $(-2)^{19}$
2) Trouver le reste de la division euclidienne par 7 de $351^{12}\times 85^{15}$
3) Démontrer que pour tout entier naturel n, $5^{4n}-1$ est divisible par 13
4) Vérifier que $2^4 \equiv -1(17)$ et $6^2 \equiv 2\ (17)$. En déduire le reste de la division par 17 des nombres 1532^{20} et 346^{12}
5) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système suivant : $\begin{cases} x+2 \equiv -1(7) \\ 100 \leq x < 125 \end{cases}$