Chapitre 1 : NOMBRES COMPLEXES

Les nombres complexes prennent naissance au XVIème siècle lorsqu'un italien *Gerolamo Cardano* (1501 ; 1576), ci-contre, au nom francisé de *Jérôme Cardan*, introduit $\sqrt{-15}$ pour résoudre des équations du troisième degré.
En 1572, un autre italien, *Rafaele Bombelli* (1526 ; 1573) publie "*Algebra, parte maggiore dell'aritmetica, divisa in tre libri*" dans lequel il présente des nombres de la forme $a+b\sqrt{-1}$ et poursuit les travaux de *Cardan* sur la recherche de solutions non réelles pour des équations du troisième degré.
A cette époque, on sait manipuler les racines carrées d'entiers négatifs mais on ne les considère pas comme des nombres.
Lorsqu'une solution d'équation possède une telle racine, elle est dite imaginaire.
La notation *i* apparaît en 1777 siècle avec *Leonhard Euler* (1707 ; 1783) qui développe la théorie des nombres complexes sans encore les considérer comme de « vrais » nombres. Il les qualifie de nombres impossibles ou de nombres imaginaires.
Au XIXe siècle, *Gauss* puis *Hamilton* posent les structures de l'ensemble des nombres complexes. Les nombres sans partie imaginaire sont un cas particulier de ces nouveaux nombres. On les qualifie de « réel » car proche de la vie. Les complexes sont encore considérés comme une création de l'esprit.

I- Ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes

1) Forme algébrique

Définition Un nombre complexe est un nombre de la forme Z = x + iy où x et y sont des réels et i un nombre vérifiant $i^2=-1$

Cette écriture Z = x + iy s'appelle la **forme algébrique** de Z :

- x s'appelle la **partie réelle** de Z notée Re(Z)
- y s'appelle la **partie imaginaire** de Z notée Im(Z)

A noter :

- L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.
- Si la partie réelle d'un nombre complexe Z est nulle, on a Z = **iy** . Z est alors appelé un **imaginaire pur**

2) Inverse d'un nombre complexe

Tout nombre complexe Z admet un unique inverse noté $\frac{1}{Z}$.

Pour obtenir la forme algébrique d'un quotient dans $\mathbb{C}$, on multiplie le numérateur et le dénominateur du quotient par l'expression conjuguée du dénominateur .

Exemple :

$$\frac{1}{4+2i} = \frac{1(4-2i)}{(4+2i)(4-2i)} =$$

$$\frac{5+2i}{1+3i} =$$

3- Nombre complexe conjugué

Définition Soit Z = $x+iy$
Le nombre complexe x – iy est appelé nombre **complexe conjugué de Z** noté $\overline{Z}$
On a donc $\overline{Z}=x-iy$

Propriété des conjugués Soit Z et Z’ deux nombres complexes.

1) $\overline{\overline{Z}} = Z$ 2) $\overline{Z+Z'}=\overline{Z}+\overline{Z'}$ 3) $\overline{Z\times Z'}=\overline{Z}\times\overline{Z'}$ 4) $\forall$ $n \in \mathbb{N}^*$, $\overline{Z^n}=\overline{Z}^n$

5) pour Z’ ≠ 0 , $\overline{\left(\frac{1}{Z'}\right)}=\frac{1}{\overline{Z'}}$ et $\overline{\left(\frac{Z}{Z'}\right)}=\frac{\overline{Z}}{\overline{Z'}}$

Démonstration : Posons Z = x + iy et Z’ = x’+ iy’. Alors :

- Les propriétés 1 , 2 et 3 se démontrent avec la forme algébrique

$\overline{Z\times Z'}$ =

$\overline{Z}\times\overline{Z'}$ =

- La propriété 4) se démontre par récurrence

Initialisation :

- Démontrer la propriété 5) à l'aide de l'égalité $\overline{Z\times\frac{1}{Z}}=1$

Exemples : Ecrire en fonction de $\overline{Z}$ les conjugués des nombres complexes suivant :

$\overline{z^4-5z+3i-4}$ =

$\overline{\left(\frac{z-2i}{z+4i-2}\right)}$ =

II- Techniques opératoires

a) Complexes égaux

Théorème Soient Z = x + i y et Z' = x' + i y' deux nombres complexes.

$$Z = Z' \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$$

L'écriture d'un nombre complexe est unique

C'est une propriété utile quand il faut résoudre une équation où Z et son conjugué $\overline{Z}$ sont présents.
Voir vidéo en ligne

Exemple 1 : Résoudre l'équation

$Z + 2\overline{Z} = 3 - 4i$

On écrit Z = x+ i y d'où $\overline{Z}$ = x - i y. On remplace alors dans l'équation :

$$x + i\,y + 2(x - i\,y) = 3 - 4i$$

$$3x - i\,y = 3 - 4i$$

On identifie alors les parties réelles et imaginaires :

$\begin{cases} 3x = 3 \\ -y = -4 \end{cases}$ ce qui donne $\begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$

Ainsi , S = { 1 + 4i }

Exemple 2 : Résoudre l'équation $Z^2 = Z \times \overline{Z}$

On écrit Z = x + iy donc $\overline{Z} = x - i\,y$ d'où

$$(x + i\,y)^2 = (x + i\,y)(x - i\,y)$$

$$x^2 + 2i\,xy - y^2 = x^2 - (i\,y)^2$$

$$x^2 - y^2 + 2i\,xy = x^2 + y^2$$

On identifie alors les parties réelles et imaginaires :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = x^2 + y^2 \\ 2\,xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x \;\; réel \end{cases}$$

S = { x + 0i avec x ∈ ℝ }

b) Nombres réels , nombres imaginaires purs

Propriétés :

- $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$
- $z - \overline{z} = 2\,i\,\mathrm{Im}(z)$
- z réel ⇔ $z = \overline{z}$
- z imaginaire pur ⇔ $z + \overline{z} = 0$

Démonstration : Ces propriétés se démontrent facilement en utilisant la forme algébrique de z

$$z + \overline{z} \;=\; x + i\,y + x - i\,y = 2\,x = 2\,\mathrm{Re}(z)$$

$$z - \overline{z} = x + i\,y - x + i\,y = 2i\,y \;=\; 2\,i\,\mathrm{Im}(z)$$

Exemple : Démontrer sans calcul que le nombre z = $\frac{2-7i}{-3+5i} + \frac{2+7i}{-3-5i}$ est un nombre réel.

Il suffit de remarquer que z peut s'écrire : $z = \frac{2-7i}{-3+5i} + \overline{\frac{2-7i}{-3+5i}}$ = Z + $\overline{Z}$ = $2\,\mathrm{Re}(Z)$

III- Equations du second degré

Propriété Soit a , b et c **trois réels** avec $a \neq 0$.

L'équation $az^2+bz+c=0$ a pour discriminant $\Delta=b^2-4ac$.

- Si $\Delta>0$, l'équation admet deux solutions réelles $z_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
- Si $\Delta=0$, l'équation admet une solution réelle dite double $z_0=-\dfrac{b}{2a}$
- Si $\Delta<0$ l'équation admet deux solutions complexes conjuguées : $z_1=\dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2=\dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Exemple : Résoudre l'équation $z^2-4z+8=0$

$\Delta=16-4\times1\times8=-16$ < 0 donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

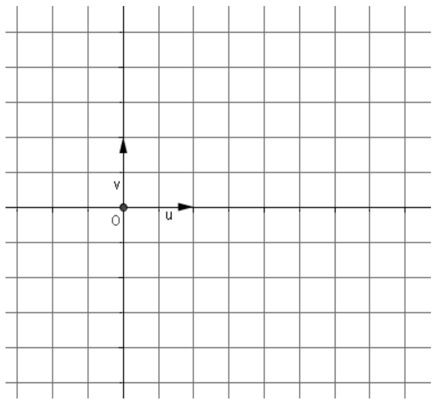
$$z_1=\frac{4-4i}{2} \text{ et } z_2=\frac{4+4i}{2} \text{ c'est à dire } z_1=2-2i \text{ et } z_2=4+4i$$

IV- Représentation géométrique d'un nombre complexe

a) Généralités

Munissons le plan d'un repère orthonormé (O $,\vec{u},\vec{v}$)

Principe : A tout nombre complexe **z = x + iy** avec x et y réels, on associe le point M de coordonnées (x ; y)
On dit alors que z est **l'affixe** du point M et on écrit M(z)



z_1 = 2 + **i** M_1 (... ; ...)

z_2 = 3 – 2**i** M_2 (... ; ...)

Vocabulaire :

- Le point $M(x;y)$ s'appelle **l'image** du nombre complexe z = x + **iy**
- L'axe des abscisses est l'axe des réels
- L'axe des ordonnées est l'axe des imaginaires purs

Quelques règles de base

- On définit également l'affixe du vecteur $\vec{v}(a;b)$ comme le nombre complexe $a+ib$.

  Ainsi, l'affixe du point A est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OA}$.

  Plus généralement, si A a pour affixe a et B pour affixe b, l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $b-a$
- **Parallélogramme**

  Soit a , b , c et d quatre nombres complexes d'images respectives A , B , C et D

  ABCD est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ c'est à dire

  si et seulement si $b-a = c-d$
- **Milieu d'un segment**

  Le milieu I du segment [AB] avec A(a) et B(b) a pour affixe $\dfrac{a+b}{2}$