Chapitre 0 : Quantificateurs et raisonnements

I- Quantificateurs

Les quantificateurs sont des symboles permettant d'écrire des phrases de manière plus simple à lire et à écrire.

Le quantificateur universelle $\forall$ signifie « pour tout » ou « quel que soit »

le quantificateur existentiel $\exists$ signifie « il existe »

Exemples: $\forall x \in \mathbb{R}, -x^2 \leq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^+, \sqrt{x} \geq 0$, $\exists x \in \mathbb{R} / \sqrt{x}=9$, $\exists! x \in \mathbb{R} / \frac{1}{y}=4$

Mélange des quantificateurs

Deux quantificateurs **de même nature** peuvent s'intervertir

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x^2+y^2 \geq 0 \Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x^2+y^2 \geq 0$$

Par contre deux quantificateurs différents placés dans un certains ordre ne peuvent pas s'intervertir . Les changer d'ordre peut complètement changer le sens de la proposition

1) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} / x = y^2$ est différent de $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} / x = y^2$

2) On note P l'ensemble des portes d'un lycée qui sont munies d'une serrure et C l'ensemble des clés que possède le concierge de ce lycée.

   Quel est le sens en français courant et concret des assertions suivantes :

- $\forall p \in P$ $\exists c \in C$, c ouvre P le concierge possède une clé pour chacune des portes
- $\exists c \in C$ $\forall p \in P$, c ouvre P Le concierge possède un passe qui ouvre toutes les portes

II- Raisonnements en mathématiques

1) Le raisonnement exhaustif

L'idée est d'étudier tous les cas possibles.

Cherchons à démontrer la propriété P suivante: **Propriété P :** $\forall n \in \mathbb{N}, N = 1 + 3^n$ est pair

On peut s'intéresser aux chiffres des unités pour 3^n . Celui ne peut être que 1 , 3 , 7 , 9 .

Donc le chiffre des unités de N sera 2 , 4 , 8 ou 0 et N est pair

2) Le raisonnement par disjonction de cas

A la différence d'une étude exhaustive, dans une disjonction de cas, les situations sont différenciées à l'aide d'un ou de plusieurs critères.

Cherchons à démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, n(n+1) est pair

n étant un entier naturel, il est pair ou impair. Il peut donc s'écrire : n = 2k ou n = 2k + 1

Cas n = 2k : n(n+1) = 2k (2k+1) = 2K avec $K \in \mathbb{N}$ d'où n est pair

Cas n = 2k + 1 : n(n+1) = (2k+1)(2k+2) = 2 (2k+1)(k+1) = 2 K avec $K \in \mathbb{N}$ d'où n est pair

3) Le raisonnement par contraposée

Pour démontrer une implication $P \Rightarrow Q$,il est équivalent de démontrer que non $Q \Rightarrow$ non P

Démontrons par contraposée la proposition suivante : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, n^2 pair $\Rightarrow$ n pair
On va donc démontrer la proposition suivante : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, n impair $\Rightarrow$ n^2 impair
D'après la démonstration précédente, on sait que si n est impair, n s'écrit 2k + 1 et alors n^2 peut s'écrire 2K+1 avec $K \in \mathbb{N}$ d'où n^2 est impair . On a donc $\forall\, n \in \mathbb{N}$, n impair $\Rightarrow$ n^2 impair d'où le résultat

4) Le raisonnement par l'absurde

Pour démontrer qu'une proposition P est vraie, on suppose le contraire c'est à dire que P est fausse et on tente d'arriver à un résultat faux ou absurde

Cherchons à démontrer la propriété suivante :

Trois entiers a , b et c sont tels que $a^2+b^2=c^2$. Prouver que a et b ne sont pas tous les deux impairs.

Supposons que a et b soient tous les deux impairs. Il peuvent donc s'écrire : a = 2k + 1 et b = 2q +1
On a alors: $a^2+b^2=(2k+1)^2+(2q+1)^2 = 4k^2+4q^2+4k+4q+2 = 2(2k^2+2q^2+2k+2q+1)$ =2K avec $K\in\mathbb{N}$
d'où c^2 est pair et d'après la démonstration précédente, c est donc pair et c^2 est alors multiple de 4 Or :
$a^2+b^2 = 4k^2+4q^2+4k+4q+2$ qui n'est pas multiple de quatre il y a donc contradiction et a et b ne sont pas tous les deux impairs

5) Le raisonnement par récurrence

Un raisonnement très utile qui sera vu très prochainement en obligatoire. Le principe en est le suivant :

Soit n_0 un entier naturel. On cherche à démontrer **par récurrence** qu'une propriété P_n est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$. On procède en **trois étapes :**

Première étape : initialisation : on vérifie que P_n est vraie pour le premier entier n_0

Deuxième étape : on suppose que pour un entier naturel n quelconque, la proposition P_n est vraie, et sous cette hypothèse, on démontre que la proposition P_{n+1} l'est aussi

Troisième étape: **Conclusion**:

Par hérédité, la proposition étant vraie au rang n_0,elle est vraie pour tout entier $n \geq n_0$

Démontrer par récurrence la propriété suivante : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, 3 divise 4^n-1

1) **Initialisation :** pour n = 0 , $4^0-1=0$ divisible par 3. La propriété est vraie au rang 0

2) Supposons qu'il existe un entier naturel n tel 3 divise 4^n-1 démontrons alors que 3 divise aussi $4^{n+1}-1$

$$4^{n+1}-1 = 4\times 4^n-1 = 4\times(4^n-1+1)-1 = 4\times(4^n-1)+3$$

Or on a supposé que 4^n-1 est divisible par 3 donc il peut s'écrire 3k avec $k \in \mathbb{N}$ d'où :

$$4^{n+1}-1=4\times 3k+3=3(4k+1)$$ avec $4k+1 \in \mathbb{N}$ donc

$4^{n+1}-1$ est divisible par 3

3) **Conclusion :** Si 4^n-1 est divisible par 3 alors $4^{n+1}-1$ l'est aussi. Or on sait que 4^0-1 est divisible par 3 donc 4^1-1 l'est aussi et par hérédité : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, 3 divise 4^n-1