Problème d'évolution

I- Suites de matrices colonnes ou lignes

1) Des exemples pour comprendre

- La suite X_n définie par $X_n = \begin{pmatrix} \cos(n) \\ 2^n \\ (n+1)^2 \end{pmatrix}$ est une suite de matrices colonnes et

  $Y_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & 4n+2 & 9n-3 \end{pmatrix}$ est une suite de matrices lignes. Les coefficients de ces matrices sont des suites

- **Système linéaire définissant deux suites**

  Soit (u_n) et (v_n) les suites définies par $u_0=1$, $v_0=2$ et $\begin{cases} u_{n+1}=2u_n+3v_n+0{,}5 \\ v_{n+1}=4u_n-5v_n+7 \end{cases}$.

  En considèrant la matrice colonne $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$, la matrice A= $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$ et la matrice B= $\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 7 \end{pmatrix}$,

  on peut alors écrire $X_{n+1}=AX_n+B$

  A noter que l'on peut définir aussi la matrice ligne $Y_n = \begin{pmatrix} u_n & v_n \end{pmatrix}$, la matrice A est alors

  A= $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ et on a alors $Y_{n+1}=Y_n A+B$

- **Suite récurrente linéaire d'ordre 2**

  Soit (u_n) la suite définie par $u_0=1; u_1=4$ et $u_{n+2}=2u_{n+1}-4u_n$

  En posant $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$ et A = $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ on peut définir la suite de matrices colonnes X_n par $X_{n+1}=A X_n$

2) Terme général d'une suite de matrices

Propriété 1 :
Soit une suite de matrice colonne U_n de taille p vérifiant pour tout entier naturel n : $U_{n+1}=AU_n$ où A est une matrice carrée d'ordre p . Alors pour tout entier naturel n , $U_n=A^n U_0$

Démonstration : **A connaître et à savoir refaire**

Initialisation : On a par convention $A^0=I_p$ d'où $A^0U_0 = I_pU_0 = U_0$ La relation vraie au rang 0
Supposons qu'il existe un entier n tel que $U_n=A^nU_0$ et démontrons alors que $U_{n+1}=A^{n+1}U_0$
On sait que $U_n=A^nU_0$ donc $U_{n+1}=A\times A^n\times U_0 = A^{n+1}U_0$ CQFD
On termine la récurrence

Propriété 2 : Soit une suite de matrice colonne U_n de taille p vérifiant pour tout entier naturel n : $U_{n+1}=AU_n+B$ où A est une matrice carrée d'ordre p et B une matrice colonne de taille p. S 'il existe une matrice colonne C telle que C = AC + B alors le terme général de cette suite peut s'écrire : $U_n=A^n(U_0-C)+C$.

Démonstration : Une démonstration que l'on retrouve dans les sujets

Il suffit d'introduire que la suite de matrice $V_n = U_n - C$ et d'utiliser la propriété 1.

$V_{n+1}=U_{n+1}-C = AU_n+B-C$ Or C = AC + B donc

$V_{n+1}=AU_n+B-AC-B=AU_n-AC = A(U_n-C) = AV_n$

D'après la propriété 1, on a donc $V_n=A^nV_0$ avec $V_0=U_0-C$ d'où comme $U_n=V_n+C$, il vient : $U_n=A^n(U_0-C)+C$

Convergence des suites vérifiant $U_{n+1}=AU_n+B$

Propriété : Soit une suite de matrices colonnes vérifiant $U_{n+1}=AU_n+B$.

On suppose qu'il existe une matrice C telle que C = AC + B

1. Si $U_0=C$, la suite (U_n) est constante égale à C
2. Si $U_0\neq C$ et si la suite (A^n) converge alors la suite U_n converge vers C.

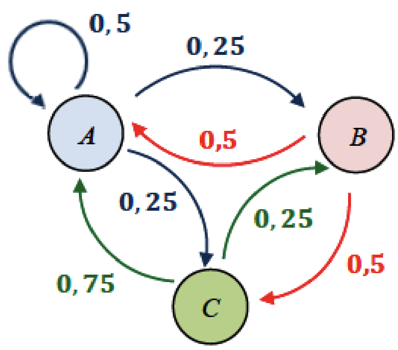
1) $U_1=AU_0+B$ = AC+B = C d'où la réponse
2) La convergence vers C vient du passage à la limite de $U_{n+1}=AU_n+B$. Si $\lim_{n\to+\infty} U_n$ = C alors $\lim_{n\to+\infty} U_{n+1}$ = C d'où la relation devient C=AC+B

II – Etude des marches aléatoires

1) Graphe probabiliste

Dans une équipe de football, on étudie les passes que se font trois attaquants A , B et C .

Les probabilités qu'un attaquant passe le ballon à un autre sont représentées sur le schéma ci-contre (On appelle étape un tel passage de balle)



Par exemple, la probabilité que l'attaquant A passe le ballon à l'attaquant B est égale à 0,25 et la probabilité que l'attaquant A garde la balle est égale à 0,5

Un tel schéma est appelé **graphe probabiliste**, A , B , C sont appelés les **sommets** du graphe

Remarque : la somme des probabilités partant d'un même sommet est égale à 1 .

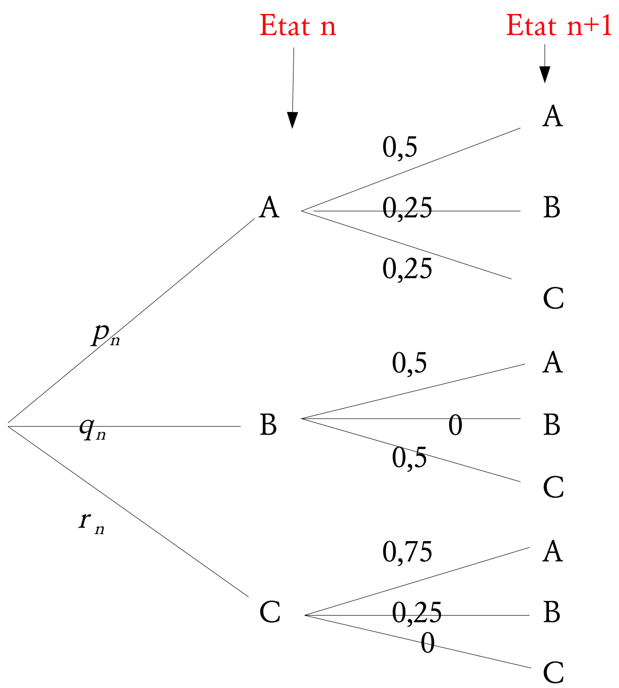
2) Matrice de transition

L'expérience aléatoire précédente a trois issues possibles (A , B , C) .

Une **marche aléatoire** sur {A , B , C} est une suite de variables aléatoires (X_n) qui donne la probabilité qu'un attaquant possède le ballon à l'étape n ($n^{ième}$ passe).

La loi de probabilité à l'état n E_n est donnée sous la forme d'une matrice ligne $\begin{pmatrix} P(X_n=A) & P(X_n=B) & P(X_n=C) \end{pmatrix}$ ou d'une matrice colonne $\begin{pmatrix} P(X_n=A) \\ P(X_n=B) \\ P(X_n=C) \end{pmatrix}$.

Si on représente la situation à l'aide d'un arbre en notant $p_n = P(X_n=A)$, $q_n=P(X_n=B)$ et $r_n=P(X_n=C)$, on a donc :



En utilisant la formule des probabilités totales, on obtient donc : $\begin{cases} p_{n+1}=0{,}5\,p_n+0{,}5\,q_n+0{,}75\,r_n \\ q_{n+1}=0{,}25\,p_n+0{,}25\,r_n \\ r_{n+1}=0{,}25\,p_n+0{,}5\,q_n \end{cases}$

On peut alors représenter ce système soit à l'aide d'une matrice ligne pour E_n soit à l'aide d'une matrice colonne :

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} & q_{n+1} & r_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n & q_n & r_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}25 & 0{,}25 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}75 & 0{,}25 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \\ r_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}75 \\ 0{,}25 & 0 & 0{,}25 \\ 0{,}25 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$$

Définition :

- La probabilité de passage de l'état i à l'état j en une étape (ou une transition) est la probabilité $P_{X_n=i}(X_{n+1}=j)$. On la note $p_{i,j}$
- **Cas où E_n est une matrice ligne**

  La matrice dont le coefficient situé à la ligne i et à la colonne j est $p_{i,j}$ est **la matrice de transition de la marche aléatoire**

  Dans l'exemple étudié, la matrice de transition est : M = $\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 0,5 & 0,25 & 0,25 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0,75 & 0,25 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$

  On a alors :
  - $E_{n+1}=E_n \times M$
  - $E_n=E_0 \times M^n$ ou $E_n=E_1 \times M^{n-1}$
- **Cas où E_n est une matrice colonne**

  La matrice dont le coefficient situé à la ligne j et à la colonne i est $p_{i;j}$ est **la matrice de transition de la marche aléatoire**

  Dans l'exemple étudié, la matrice de transition est : M = $\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0,75 \\ 0,25 & 0 & 0,25 \\ 0,25 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$

  On a alors
  - $E_{n+1}=M \times E_n$
  - $E_n=M^n \times E_0$ ou $E_n=M^{n-1} \times E_1$

Propriétés : Soit une matrice de transition d'une marche aléatoire

- Tous ses éléments sont compris entre 0 et 1 $0 \leq p_{i,j} \leq 1$
- La somme des éléments de chaque ligne (ou chaque colonne) est 1 : $\sum_{j=1}^{n} p_{i,j} = 1$

<u>Exemple :</u> Si on suppose que l'attaquant A possède le ballon à l'état 0, on a alors $E_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Si on souhaite connaître la matrice état après 3 étapes, on calcule $E_3 = E_0 \times M^3$

D'où à la calculatrice, $M^3 = \begin{pmatrix} 0,5625 & 0,2031 & 0,2343 \\ 0,5312 & 0,1875 & 0,2812 \\ 0,5781 & 0,2031 & 0,2187 \end{pmatrix}$ et

$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,5625 & 0,2031 & 0,2343 \\ 0,5312 & 0,1875 & 0,2812 \\ 0,5781 & 0,2031 & 0,2187 \end{pmatrix} = (0,5625 \; 0,2031 \; 0,2343 \,)$

La probabilité que le ballon soit en possession de l'attaquant B à la 3ème passe est donc de 0,2031

3) Etude asymptotique (c'est à dire quand n tend vers +∞) d'une marche aléatoire

Propriété :

- Une marche aléatoire de matrice de transition M est convergente si la suite E_n des états de la marche converge.
- Si la suite E_n est une suite convergente de matrices lignes (resp . une suite convergente de matrices colonnes) vérifiant $E_{n+1}=E_n\times M$ (resp $E_{n+1}=M\times E_n$) alors la limite P de cette suite vérifie l'équation $P=PM$ (resp. P=MP) et la limite P est alors appelée **état stable** de la marche aléatoire

Retour à notre exemple :

En supposant que la marche aléatoire précédente $E_{n+1}=E_n\begin{pmatrix}0,5 & 0,25 & 0,25\\ 0,5 & 0 & 0,5\\ 0,75 & 0,25 & 0\end{pmatrix}$ est convergente, on a

donc à la limite $P=PM$ d'où $PM-P=0$ cad $P(M-I_3)=0$.

Si on note P = $(x \quad y \quad z)$, on a donc :

$$P(M-I_3)=0 \Leftrightarrow (x \quad y \quad z)\begin{pmatrix}-0,5 & 0,25 & 0,25\\ 0,5 & -1 & 0,5\\ 0,75 & 0,25 & -1\end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases}-0,5x+0,5y+0,75z=0 & L_1\\ 0,25x-y+0,25z=0 & L_2\\ 0,25x+0,5y-z=0 & L_3\end{cases}$$

Or $L_1=-L_2-L_3$ ainsi l'information fournie par L_1 est contenue dans L_2 et L_3. Il faut alors remplacer L_1 par une information indépendante des deux autres. Comment faire ???

L'ASTUCE est la suivante : P = $(x \quad y \quad z)$ **donc** $x+y+z=1$ **. Le système devient donc :**

$$\begin{cases}x+y+z=1 & L_1\\ 0,25x-y+0,25z=0 & L_2\\ 0,25x+0,5y-z=0 & L_3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0,25 & -1 & 0,25\\ 0,25 & 0,5 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,56 & 0,96 & 0,8\\ 0,2 & -0,8 & 0\\ 0,24 & -0,16 & -0,8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,56\\ 0,2\\ 0,24\end{pmatrix}$$

__Remarques__

- Cette méthode ne prouve pas que la marche est convergente, elle permet seulement de déterminer l'état stable de la marche si il existe
- Dans le cas d'une marche aléatoire de matrice de transition M, la matrice $M-I_3$ ne sera jamais inversible, il faut donc penser à introduire l'astuce précédente qui consiste à écrire que la somme des coefficients de l'état stable est égale à 1 (x+y+z=1).

Cas de deux états

Propriété : Soit une marche aléatoire à deux états de matrice de transition M = $\begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$

Pour (a ; b) différents de (0 ; 0) et (1 ; 1) , la suite définie par $U_{n+1}=U_n \times M$ converge vers un état stable indépendamment de la distribution initiale.

Cet état stable est $\pi = \begin{pmatrix} \dfrac{b}{a+b} & \dfrac{a}{a+b} \end{pmatrix}$. Il est solution de l'équation $\pi \ M = \pi$

Application :

Deux joueurs de Tennis A et B décident de jouer une partie toutes les semaines

La probabilité que A gagne la partie de la première semaine est 0,7. Si A gagne la partie de la semaine n, la probabilité qu'il gagne la partie la semaine suivante est 0,4. Si A perd la partie la semaine n , la probabilité qu'il gagne la partie la semaine suivante est 0,9. On note S_1 l'état « A gagne la partie la semaine n » et S_2 l'état « B gagne la partie la semaine n »

1) Ecrire la matrice de transition associée à cette marche aléatoire, en prenant les états dans l'ordre S_1 , S_2

2) Déterminer l'état stable de cette marche aléatoire . Conclure .

Cas d'une marche aléatoire N états

Soit une marche aléatoire à N états (N ≥ 3) dont la matrice de transition est M .

S'il existe un entier naturel n tel que la matrice M^n n'a aucun élément égal à 0, alors la suite (U_n) décrivant l'état probabiliste de cette marche converge .

La limite de cette suite définit un **état stable** solution de l'équation U = $U \times M$

Exemple : Un individu susceptible de contracter une maladie peut être dans trois états : S (susceptible de tomber malade) , M (infecté) et I (immunisé) . Son état peut changer tous les trois mois selon la matrice de transition

$M = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,3 & 0,1 \\ 0 & 0,1 & 0,9 \\ 0,1 & 0 & 0,9 \end{pmatrix}$. Faire une étude asymptotique de cette marche aléatoire