Fiche d'exercices : Nombres Premiers

Exercice 1 :

Sans calculatrice, déterminer si les entiers suivants sont des nombres premiers

97 ; 109 ; 117 ; 271 ; 323 ; 401 ; 527 ; 719

- sqrt{97} ≈ 9,8 donc on divise 97 par les nombres premiers inférieurs à 9,8 c'est à dire par 2,3,5,7

97 n'est pas divisible par 2 , 3 , 5 et comme 97/7 ≈ 13,8 97 n'est pas divisible par 7 d'où 97 est premier

- Sur le même principe on prouve que : 109 , 271 , 401 , 719 sont premiers
- pour les autres on a : 117 = 9×13 , 271 ; 323 = 17×19 , 527 = 17*31

Exercice 2 :

Soit p un nombre premier ≥ 5

1) Démontrer que p^2-1 est divisible par 3

   3k , 3k+1 , 3k+2 d'où p^2-1 =

2) Démontrer que p^2-1 est divisible par 8

   8k+1 , 8k+3 , 8k+5 , 8k+7

3) Que peut-on en déduire pour p^2-1 ?

   GAUSS

Exercice 3 :

p > 3 est un nombre premier

1) Quels sont les restes possibles dans la division de p par 12 ?

   12k+1 , 12k +5 , 12k +7 , 12k+11

2) Prouver que p^2+11 est divisible par 12

   on teste les 4 cas précédents

Exercice 4 :

Démontrer que pour tout entier n ≥ 1 , l'entier 30n+7 n'est jamais la somme de deux nombres premiers

supposons 30n+7 = p + p' = 2k+1 + 2k'+1 = ...

Exercice 5 : Les nombres de Mersenne

Pour n ≥ 1 , le nième nombre de Mersenne est le nombre $M_n = 2^n-1$

1) Quels sont les nombres de Mersenne qui sont premiers pour n ≤ 6 ?

$M_1=1$, $M_2=3$, $M_3=7$, $M_4=16$, $M_5=31$, $M_6=63$

2) Montrer que $x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1)$

$$1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}=\frac{1-x^n}{1-x} = \frac{x^n-1}{x-1}$$

3) Montrer que si n n'est pas premier alors le nombre de Mersenne M_n ne l'est pas non plus. En déduire que si M_n est premier alors n est premier

Si n n'est pas premier n = pq donc $2^n-1=2^{pq}-1 = (2^p)^q-1 = (2^p-1)(2^{p-1}+\ldots+1)$

4) La réciproque est-elle vraie ?

5) Soit a et n deux entiers tels que a ≥ 2 et n ≥ 2

Montrer que si a^n-1 est premier alors nécessairement $a=2$ et n est premier

pour a ≥ 3 , $a^n-1=(a-1)(a^{n-1}+a^{n-2}+...+1)$ avec $a-1\geq 2$ car a ≥ 3 et $a^{n-1}+\ldots+1 \geq 2$ car n≥2 d'où a^n-1 est composé pour a ≥ 3

Le cas a = 2 est traité dans les questions précédentes

<u>Décomposition en facteurs premiers. Nombres de diviseurs</u>

<u>Exercice 6 :</u>

1) Trouver un nombre de trois chiffres qui soit un carré parfait divisible par 56

$56=2^3\times 7$ donc on doit retrouver cette décomposition dans le nombre recherché mais comme il doit être un carré parfait il faut avoir des puissances pairs d'où le nombre recherchée peut être $2^4\times 7^2=392$.

2) Trouver tous les diviseurs de 84 , puis résoudre l'équation $x(x+1)(2x+1)=84$

1,2,3,4,6,7,12,14,21,28,42,84

x, x+1 et 2x+1 sont des diviseurs associés de 84 avec x et x+1 consécutifs et 2x+1 impair Il suffit alors de tester les diviseurs précédents et on constate que la seule réponse possible est 3*4*7=84 donc x = 3

3)

<u>Exercice 7 :</u>

Le produit de deux entiers naturels a et b (a < b) est 11 340. On note d leur pgcd.

1) a) Pourquoi d^2 divise-t-il 11 340 ?

d divise a et d divise b donc a = dk et b = dk' ce qui donne $ab=d^2kk'$ d'où la réponse

b) Pourquoi d = $2^\alpha\times 3^\beta$ avec 0 ≤ α ≤ 1 et 0 ≤ β ≤ 2 ?

$d^2\times kk'=11340=2^2\times 3^4\times 5\times 7$. d^2 divisant cette décomposition en facteurs premiers il s'écrit avec des puissances paires d'où $d^2=2^2\times 3^4$ ou $2^2\times 3^2$ ou 2^2 ou 3^2 ou 3^4 on a alors d = 2×3^2 ou 2×3 ou 2 ou 3 c'est à dire $2^\alpha\times 3^\beta$ avec 0 ≤ α ≤ 1 et 0 ≤ β ≤ 2

2) On sait de plus que a et b ont six diviseurs communs et a est un multiple de 5.

a) Démontrer que d = 18.

Les diviseurs communs à deux entiers sont les diviseurs de leur pgcd donc les diviseurs de d il y en a donc $(\alpha+1)(\beta+1)$ qui doit donc être égal à 6 . Les diviseurs associés de 6 sont 1 et 6 ou 2 et 3 En testant chaque cas, on trouve pour d = 18 .

b) En déduire a et b.

a est divisible par 5 donc il s'écrit $a=18\times 5\times k$ et b = $18\times k'$

on a donc $a\times b=18^2\times 5\times k\times k'$ = 11340 ce qui donne $kk'=7$

d'où k k' diviseurs associés de 7 cad k = 1 k' = 7 ou k=7 k' = 1 mais le deuxième cas ne convient pas car a doit être inférieur à b d'où a = 18×5 et b = 18×7

Exercice 8 :

α et β sont deux naturels et n = $2^{\alpha}\times3^{\beta}$.

Le nombre de diviseurs de n^2 est le triple du nombre de diviseurs de n.

1) Prouver que (α − 1) (β − 1) = 3

le nombre de diviseur de n est $(\alpha+1)(\beta+1)$ et celui de n^2 = $(2^{\alpha}\times3^{\beta})^2$ = $2^{2\alpha}\times3^{2\beta}$ est $(2\alpha+1)(2\beta+1)$ on a donc comme égalité : $(2\alpha+1)(2\beta+1)=3(\alpha+1)(\beta+1)$. Un premier développement donne $\alpha\beta-\alpha-\beta-2=0$. Or $(\alpha-1)(\beta-1)=\alpha\beta-\alpha-\beta+1$ d'où en écrivant $-2=1-3$, on obtient la réponse demandée

2) En déduire n

$\alpha-1$ et $\beta-1$ sont des diviseurs associés de 3 donc on trouve comme couple $(\alpha;\beta)$ soit (2;4) soit (4;2) d'où $n=2^2\times3^4=324$ ou $n=2^4\times3^2=144$

Exercice 9 :

Un entier n a 5 diviseurs et n − 16 est le produit de deux nombres premiers.

1) Prouver que n = p^4 avec p premier.

Dans le cas général, la décomposition en facteurs premiers de n est $\mathbf{n=p_1^{\alpha_1}...p_m^{\alpha_m}}$ donc son nombre de diviseurs est $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)...(\alpha_m+1)$ ce qui est égale à 5 d'après l'énoncé or 5 est un nombre premier donc parmi les facteurs de $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)...(\alpha_m+1)$, il y en a un qui vaut 5 et les autres sont à 1 en conséquence cela donne un alpha qui vaut 5 et les autres 0 d'où n s'écrit p^4

2) Écrire n − 16 sous forme d’un produit de trois facteurs dépendant de p.

$n-16=p^4-16=(p-2)(p+2)(p^2+4)$

3) En déduire la valeur de n

Comme $n-16$ est un produit de deux nombres premiers, on doit avoir l'un des facteurs précédents qui vaut 1 et cela ne peut être que $p-2$ (vérifier les deux autres) ce qui donne p = 3 donc $n=(3-2)(3+2)(9+4)=5\times13=65$

Exercice 10 : **Partie A**

On considère l'équation suivante où x et y sont des entiers naturels : $x^2-8y^2=1$ (E).

1) Déterminer un couple solution $(x\,;\,y)$ où x et y sont deux entiers naturels.

Le couple (1;0) correspond

2) On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}3 & 8\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ On définit les suites d'entiers naturels (x_n) et (y_n) par :

$x_0=1$, $y_0=0$, et pour tout entier naturel n, $\begin{pmatrix}x_{n+1}\\ y_{n+1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}$

a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, le couple $(x_n;y_n)$ est solution de l'équation (E).

initialisation : c'est la question 1)

SQ $(x_n;y_n)$ est solution de (E) et DQ $(x_{n+1};y_{n+1})$ l'est aussi :

On a donc $\begin{cases}x_{n+1}=3x_n+8y_n\\ y_{n+1}=x_n+3y_n\end{cases}$ d'où $x_{n+1}^2-8y_{n+1}^2$ = $(3x_n+8y_n)^2-8(x_n+3y_n)^2$ = $x_n^2-8y_n^2$ = 1

et on finit la récurrence

b) En admettant que la suite (x_n) est à valeurs strictement positives, démontrer que pour tout entier naturel n, on a : $x_{n+1}>x_n$.

$y_n\geq 0$ et $x_n\geq 1$ donc $x_{n+1}=x_n+2x_n+8y_n$ avec $2x_n+8y_n\geq 2$ donc $x_{n+1}>x_n$

3) En déduire que l'équation (E) admet une infinité de couples solutions.

La suite (x_n) est strictement croissante avec des termes tous distincts $(x_{n+1}>x_n)$ et à chaque x_n correspond un y_n donc une infinité de solution à l'équation

Partie B

Un entier naturel n est appelé un nombre puissant lorsque, pour tout diviseur premier p de n, p^2 divise n.

1) Vérifier qu'il existe deux nombres entiers consécutifs inférieurs à 10 qui sont puissants.

n n'est pas premier car il admet deux diviseurs distincts p et p^2, donc on teste les entiers ≤ 10 non premiers et on trouve 4 , 8 , 9 puissants et il n'y a donc que deux entiers consécutifs puissants ≤ 10

L’objectif de cette partie est de démontrer, à l’aide des résultats de la partie A, qu’il existe une infinité de couples de nombres entiers naturels consécutifs puissants et d’en trouver quelques exemples.

2) Soient a et b deux entiers naturels. Montrer que l’entier naturel $n = a^2 b^3$ est un nombre puissant.

Soit p un nombre premier qui divise n. On a donc n = $p \times k$ d'où $a^2 b^3 = p \times k$ ainsi p divise $a^2 b^3$ et comme p est premier, p divise a ou p divise b

- p divise a donc a = pp' et on a alors n = $(pp')^2 b^3$ = $p^2 p'^2 b^3$ et p^2 divise n
- p divise b donc b = pp' et on a alors $n = a^2 (pp')^3$ = $p^2 (a^2 pp^3)$ et p^2 divise n

<u>**Conclusion**</u> n = $a^2 b^3$ est puissant

3) Montrer que si $(x\,;y)$ est un couple solution de l’équation (E) définie dans la partie A, alors $x^2 - 1$ et x^2 sont des entiers consécutifs puissants.

- x^2 est évidemment un entier puissant car tout diviseur premier p de x divise x^2 et si p divise x , p^2 divise x^2
- On a $x^2 - 8y^2 = 1$ cad $x^2 - 1 = 8y^2$ = $2^3 y^2$ donc d'après la question 2) $x^2 - 1$ est puissant

4) Conclure quant à l’objectif fixé pour cette partie, en démontrant qu’il existe une infinité de couples de nombres entiers consécutifs puissants.

Il existe une infinité de solutions à l'équation (E) or si un couple est solution de (E) alors x^2 et $x^2 - 1$ sont des entiers consécutifs puissants donc il existe une infinité d'entiers consécutifs puissants

Déterminer deux nombres entiers consécutifs puissants supérieurs à 2 018.

pour trouver un tel couple, on cherche des solutions à l'équation (E) :

n	x_n	y_n	$x_n^2 - 1$	x_n^2
0	1	0	0	1
1	3	1	8	9
2	17	6	288	289
3	99	35	9800	9801

on peut donc citer 9800 et 9801